
Hosted by Google

Lehrbuch

der

elementaren Planimetrie

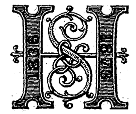
von

Dr. Jul. Petersen,
Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Deutsche Ausgabe,
unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

von

Dr. R. von Fischer-Benzon,
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen.
Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn,
Universitätsbuchhändler,
Kommissionäre d. kgl. dän. Gesellschaft der Wissenschaften.
1881

Preis 1 Mk. 60 Pf.

Lehrbuch

der

elementaren Planimetrie

von

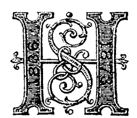
Dr. **Jul. Petersen,**
Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Deutsche Ausgabe,

unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

von

Dr. **R. von Fischer-Benzon,**
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen.
Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn,
Universitätsbuchhändler,
Kommissionäre d. kgl. dän. Gesellschaft der Wissenschaften.
1881

Kopenhagen. — Bianco Lunos Königl. Hof-Buchdruckerei.

Vorrede.

Man wird sich heutigen Tages wohl darüber einig sein, dafs der Unterricht in der Geometrie nicht den Zweck hat, die Schüler nur ein System der Geometrie zu lehren, sondern vielmehr den, dieselben für die Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben geschickt zu machen. Die Auflösung solcher Aufgaben ist eine vorzügliche Übung im logischen und consequenten Denken, und aufserdem kommen unter den übrigen auf dem Gymnasium gestellten Aufgaben keine vor, die sich in ähnlicher Weise vollständig und erschöpfend von einem Schüler behandeln lassen.

Das vorliegende Lehrbuch der Planimetrie von Dr. Julius Petersen ist nach meinen Erfahrungen und Anschauungen vorzüglich geeignet, dem oben genannten Zwecke zu entsprechen. Es ist kurz, ohne irgend etwas Wesentliches auszulassen, einfach und anschaulich. Durch seine Kürze erleichtert es dem Schüler Lernen und Repetition; Anordnung und Auswahl des Lehrstoffes und der Aufgaben sind so, dafs die Aufgaben die erlernten Lehrsätze nicht nur einüben, sondern auch ergänzen. Abweichungen vom Herkommen finden sich nicht wenige. Ich bin aber überzeugt, dafs dieselben zeitgemäfs sind, und dafs eben hierin zum Teil die Vorzüge des Buches liegen.

Von meiner Hand rühren einzelne Zusätze und Änderungen her, die mit Rücksicht auf deutsche Verhältnisse geboten waren; dieselben haben den Charakter des Buchs natürlich nicht beeinflufst. Mit Einwilligung des Verfassers habe ich die Beweise für einige Sätze (83, β, 110, 116) umgeändert, und dieselben mit Hülfe eines Satzes geführt, der sich bei Francœur (Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik, übersetzt von Dr. Edmund Külp, 1843, Band II. S. 43) unter der Bezeichnung «Methode der Grenzen» findet. Professor Dr. Ligowski hieselbst, der diesen Satz auch in seinen Schriften anwendet, hat mich auf die Verwendbarkeit desselben für den Unterricht aufmerksam gemacht; die «Methode der Grenzen» gestattet auch solche Fälle anschaulich zu behandeln, in denen das Irrationale oder Unendliche Schwierigkeiten zu bereiten pflegt.

Kiel, im November 1880.

R. von Fischer-Benzon.

Einleitung.

1. Jeder Naturkörper besitzt zahlreiche Eigenschaften. Um die Untersuchung derselben zu erleichtern, sucht man, soweit es möglich ist, eine zur Zeit zu betrachten, indem man vorläufig von den übrigen absieht (von ihnen abstrahiert). Die verschiedenen Untersuchungen derselben Art werden dann vereinigt, und so entstehen verschiedene Wissenschaften, die Naturwissenschaften. Untersucht man beispielsweise ein Stück Kreide, so kann man nach Entstehung und Vorkommen desselben fragen, nach seinem specifischen Gewicht und seiner Farbe, nach seiner Zusammensetzung aus Elementen, seiner Gestalt u. s. w., und diese Fragen werden dann beziehungsweise von der Geologie, der Physik, der Chemie und der Geometrie beantwortet.

2. Die Geometrie behandelt die Gestalt (die Form) ohne Rücksicht auf den Stoff; spricht man von einer Kugel, so denkt man nicht an das, woraus sie gemacht ist, sondern nur an den Raum, welchen sie einnimmt; jeder Gegenstand nimmt einen Raum ein, der Ausdehnung nach allen Richtungen besitzt, und diesen nennt man einen geometrischen Körper.

Die Grenze zwischen einem Körper und dem umgebenden Raume heifst eine Fläche (Oberfläche des Körpers); eine Fläche hat keine Dicke.

Wird ein Teil einer Fläche von den umgebenden Teilen abgeschnitten, so heifst die Grenze eine Linie; eine Linie hat keine Breite.

Wird ein Stück von einer Linie abgeschnitten, so heifst die Grenze ein Punkt; derselbe hat keine Ausdehnung, sondern bezeichnet nur einen Ort im Raume.

3. Wenn sich ein Punkt bewegt, so beschreibt er eine Linie; ebenso kann man sich eine Fläche durch Bewegung einer Linie entstanden denken, und einen Körper durch Bewegung einer Fläche.

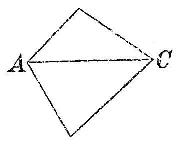
4. Man denke sich einen Körper, welcher sich um zwei feste Punkte dreht, d. h. sich so bewegt, dafs zwei von seinen Punkten ihre Stelle im Raume nicht verändern; dann kann man sich eine Linie durch diese beiden Punkte und durch alle übrigen Punkte des Körpers, welche bei der Bewegung ihre Stelle nicht verändern, gezogen denken. Eine solche Linie heifst gerade. Die gerade Linie ist also durch zwei Punkte bestimmt, d. h.: zwischen zwei gegebenen Punkten läfst sich nur eine gerade Linie ziehen. Hieraus folgt wiederum, dafs zwei verschiedene gerade Linien nur einen Punkt (Durchschnittspunkt) gemeinsam haben können, denn hätten sie zwei Punkte gemeinsam, so müfsten sie ganz zusammenfallen. Man kann sich eine gerade Linie bis ins Unendliche verlängert denken, indem man neue gerade Linien hinzufügt, welche mit den vorhergehenden zwei Punkte gemeinsam haben. Wo es nicht mifsverstanden werden kann, sagt man oft Linie anstatt gerade Linie.

Eine Linie, von der kein Teil gerade ist, heifst krumm; eine Linie, welche aus mehreren geraden Linien zusammengesetzt ist, heifst gebrochen.

5. Eine ebene Fläche oder Ebene ist eine solche, in der jede gerade Linie ihrer ganzen Ausdehnung nach liegt, sobald zwei von ihren Punkten darin liegen; die Lage einer Ebene ist bestimmt, wenn sie drei gegebene Punkte enthalten soll, welche nicht in gerader Linie liegen.

Man denkt sich eine gerade Linie und eine Ebene bis ins Unendliche ausgedehnt, sobald das Gegenteil nicht angegeben ist; eine solche unendliche gerade Linie heifst schlechthin eine Gerade; ein Punkt teilt eine Gerade in zwei Strahlen oder Halbstrahlen; ein von zwei Punkten begrenztes Stück einer Geraden heifst eine Strecke. Man kann sich eine Gerade längs sich selbst verschoben denken, ohne dafs sie verändert wird; ebenso kann man eine Ebene, ohne dafs sie verändert wird, längs sich selbst verschoben oder in sich selbst um einen ihrer Punkte gedreht denken.

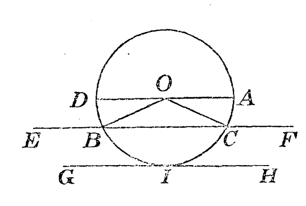
6. Ein begrenzter Teil einer Ebene heifst eine Figur; wird der Umfang einer Figur von einer krummen Linie gebildet, so heifst er Peripherie (*περιφέρω*). Ein Dreieck wird von drei geraden Linien, Seiten, begrenzt, ein Viereck von vier, ein Vieleck oder Polygon (*πολύς*, *γωνία*) von einer unbestimmten Anzahl; eine Linie, welche die Endpunkte von zwei Seiten eines Polygons verbindet ohne selbst Seite zu sein, heifst eine Diagonale (*διά*, *γωνία*) (AC).



Ein Polygon heifst convex, wenn die Verlängerungen

der Seiten aufserhalb des Polygons fallen; im entgegengesetzten Falle heifst es nicht convex.

7. Dreht sich eine Strecke OA in einer Ebene um ihren einen Endpunkt O, so beschreibt der andere eine geschlossene krumme Linie, welche Kreis oder Kreislinie genannt wird; der feste Punkt O heifst Mittelpunkt (Centrum), OA Radius (Halbmesser); alle Radien eines Kreises sind gleich lang; eine Linie, welche zwei Punkte der Peripherie mit einander verbindet, heifst Sehne (BC); ein Durchmesser ist eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht; alle Durchmesser sind gleich grofs; eine verlängerte Sehne heifst eine Secante (EF); dieselbe liegt teils innerhalb, teils aufserhalb des Kreises und schneidet denselben in zwei Punkten; bewegt man die Secante so, dass die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen (I) zusammenfallen, so heifst dieser ein Berührungspunkt und die Linie eine Tangente (GH); die Tangente hat nur einen Punkt mit der Kreislinie gemeinsam und liegt im übrigen ganz aufserhalb derselben. Ein Teil der Kreisperipherie heifst ein Bogen ($\widehat{AC}$). Ein von einer Sehne und einem Bogen begrenzter Teil einer Kreisfläche (BIC) heifst ein Kreisabschnitt (Segment); ein von zwei Radien und einem Bogen begrenzter Teil (BOC) heifst ein Kreisausschnitt (Sector).



Eine Figur heifst einbeschrieben, wenn ihre Seiten Sehnen eines Kreises sind, umbeschrieben, wenn sie Tangenten sind.

8. Zwei Figuren heifsen congruent, wenn sie in allen Stücken übereinstimmen und nur verschiedene Lagen einnehmen; man kann sich zwei congruente Figuren so auf einander gelegt denken, dafs sie sich gegenseitig decken; die Stücke, welche dann auf einander fallen, heifsen homolog. Als Zeichen der Congruenz benutzt man $\cong$. Kreise mit gleichen Radien sind congruent.

9. Das, was in einem Lehrsatze gegeben ist, heifst Voraussetzung (Hypothesis), das, was bewiesen werden soll, Behauptung (Thesis).

10. Die Planimetrie behandelt nur Figuren, welche in derselben Ebene liegen, namentlich die gerade Linie und den Kreis; die Stereometrie handelt von Linien, Flächen und Körpern im allgemeinen.

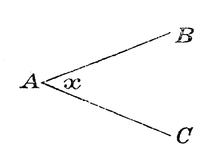
I. Kapitel.

Ueber die Lage gerader Linien.

I. Abhängigkeit der Winkel von einander.

11. Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so sagt man, dafs sie eine ganze Umdrehung gemacht hat; dreht sie sich nicht um so viel, so bestimmt man ihre Lage dadurch, dafs man angiebt, einen wie grofsen Teil der ganzen Umdrehung sie zurückgelegt hat. Man sagt, dafs die Linie einen gewissen Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage bildet, und der Winkel zwischen zwei Geraden ist also der Teil einer ganzen Um-

drehung, den die eine Gerade zurücklegen mufs, um die andere zu decken. Die beiden Geraden heifsen die Schenkel des Winkels, ihr Durchschnittspunkt der Scheitelpunkt desselben. Das Zeichen für einen Winkel ist $\angle$; wo es nicht mifsverstanden werden kann, bezeichnet man einen Winkel durch einen einzelnen Buchstaben am Scheitelpunkt ($\angle x$ oder $\angle A$); im übrigen durch drei Buchstaben, einen am Scheitelpunkt und einen an jedem Schenkel, den ersteren in der Mitte ($\angle BAC$).

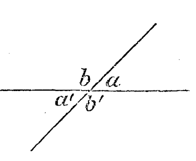


12. Die ganze Umdrehung wird in 360° (Grade) geteilt, jeder Grad in 60′ (Minuten), und jede Minute in 60″ (Sekunden); ein Winkel von 180°, der einer halben Umdrehung entspricht, heifst ein gestreckter Winkel; die Schenkel desselben liegen in einer Geraden; ein Winkel von 90°, der dem vierten Teile einer Umdrehung entspricht, heifst ein rechter Winkel (sein Zeichen ist R.); Winkel, welche kleiner sind als 90°, heifsen spitze Winkel, solche, die gröfser als 90° und kleiner als 180° sind, stumpfe Winkel. Winkel, welche nicht rechte sind, heifsen schiefe Winkel. Man sagt, dafs zwei Linien, welche einen rechten Winkel einschliefsen, senkrecht auf einander stehen; «senkrecht auf» wird durch $\perp$ bezeichnet.

13. Zwei Winkel heifsen Complemente, wenn ihre Summe gleich 1 R., Supplemente, wenn ihre Summe 2 R. beträgt, Explemente, wenn dieselbe gleich 4 R. ist. Beträgt ein Winkel $a°$, so ist sein Complement $90° - a°$, sein Supplement $180° - a°$, sein Explement $360° - a°$. Zwei Winkel müssen also gleich grofs

sein, wenn sie gleiche Complemente, Supplemente und Explemente haben.

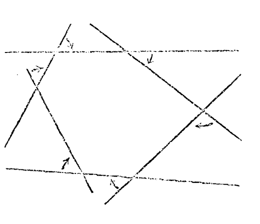
14. Zwei Winkel heifsen Nebenwinkel, wenn sie den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben, und die beiden anderen Schenkel Verlängerungen von einander sind (b und a); zwei solche Winkel machen zusammen einen gestreckten Winkel aus und sind also Supplemente. Verlängert man eine Seite eines Polygons über einen Endpunkt hinaus, so heifst der entstehende Nebenwinkel des Polygonwinkels ein Aufsenwinkel des Polygons.



15. Winkel, welche den Scheitelpunkt gemeinsam haben, und deren Schenkel Verlängerungen von einander sind, heifsen Scheitelwinkel; dieselben sind gleich grofs, denn dieselbe Drehung, welche die Schenkel des einen Winkels zur Deckung bringt, bringt auch die Schenkel des Scheitelwinkels zur Deckung; kennt man also einen von den Winkeln, welche beim Durchschnitt von zwei Geraden gebildet werden, so kann man die übrigen durch Rechnung finden; ist z. B. $a = 45^\circ$, so ist $a' = 45^\circ$, $b = b' = 135^\circ$.

16. Die Summe der Aufsenwinkel eines Polygons beträgt 4 R.

Denn denkt man sich eine Gerade auf eine der Seiten des Polygons gelegt, und darauf so weit gedreht, dafs sie mit der folgenden zusammenfällt und so fort, bis sie wieder auf der ersten Seite liegt, so wird dieselbe sich nach und nach um den Betrag aller Aufsenwinkel des Polygons gedreht haben;



dabei hat sie aber eine volle Umdrehung zurückgelegt, also 4 R.

17. Man erhält die Winkelsumme eines Polygons, wenn man so oft 2 R. nimmt als Seiten vorhanden sind, und davon 4 R. subtrahiert (2 n R. — 4 R. bei n Seiten). Die Summe eines Aufsenwinkels und des anliegenden Winkels des Polygons beträgt jedesmal 2 R.; für die Summe aller Winkel des Polygons und ihrer Aufsenwinkel erhält man also so oft 2 R., als Seiten vorhanden sind (2 n R); davon mufs die Summe der Aufsenwinkel, welche 4 R. beträgt, subtrahiert werden*).

Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 2 R., eines Vierecks 4 R., eines Siebzehnecks 30 R., u. s. w.

18. Aus 17 folgt, dafs nur ein Winkel eines Dreiecks ein rechter oder ein stumpfer sein kann; im rechtwinkligen Dreieck heifsen die Seiten, welche den rechten Winkel einschliefsen, Katheten (*χαθίημι*), die dritte Hypotenuse (*ὑποτείνω*).

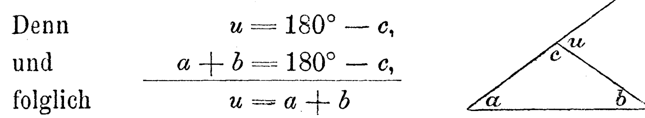
19. Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

---

*) Hat das Polygon einspringende Winkel, so gelten die Beweise in 16 und 17 gleichwohl, sobald die Drehung in entgegengesetzter Richtung negativ genommen wird.

In 16 wird gesagt, dafs die Gerade eine volle Umdrehung gemacht hat, obgleich sie auf andere Weise in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, als in 11; eigentlich ist hierbei die Definition der Ebene zu ergänzen; dieselbe Betrachtung würde sich z. B. nicht auf Bogen anwenden lassen, welche auf einer Kugeloberfläche liegen.

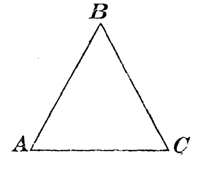
Denn $\qquad u = 180° - c,$
und $\qquad a + b = 180° - c,$
folglich $\qquad u = a + b$



20. Ein Dreieck, in dem zwei Seiten gleich grofs sind, heifst gleichschenklig; die gleich grofsen Seiten heifsen Schenkel, ihr Durchschnittspunkt die Spitze, die dritte Seite Grundlinie (Basis).

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich grofs.

Denn denkt man sich das Dreieck aus der Ebene herausgehoben und in umgedrehter Lage auf sich selbst gelegt, so dafs $\angle B$ sich selbst deckt, BC längs BA und BA längs BC fällt, so mufs A auf C und C auf A fallen, und folglich AC auf CA; da sich hierbei die Winkel A und C decken, müssen sie gleich sein.



21. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gleich grofs, so ist dasselbe gleichschenklig.

Der Beweis wird ähnlich geführt wie in 20; wenn AC und CA sich decken, so mufs, wegen der gleichen Gröfse der Winkel, AB längs CB und CB längs AB fallen; wenn aber die Schenkel der Richtung nach zusammenfallen, so mufs auch B auf B fallen, so dafs die Schenkel sich gegenseitig decken.

22. Sind alle drei Seiten gleich grofs, so heifst das Dreieck gleichseitig; die Winkel müssen hier alle gleich grofs sein (20), also jeder 60°, und umgekehrt.

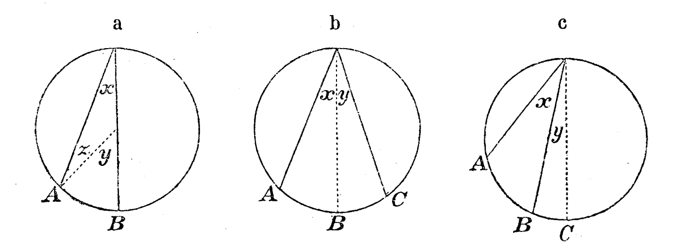
23. Kennt man einen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, so kann man die übrigen berechnen; ist ein Winkel an der Grundlinie $g°$, so ist der andere ebenso grofs, und der Winkel an der Spitze $180° - 2g°$; beträgt

der Winkel an der Spitze t°, so ist die Summe der beiden anderen $180^\circ - t^\circ$, also jeder von ihnen $90^\circ - \frac{1}{2}t^\circ$.

II. Abhängigkeit zwischen Winkeln und Kreisbogen.

24. Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt mit dem Mittelpunkt eines Kreises zusammenfällt, und dessen Schenkel Radien sind, heiſst ein Centriwinkel; durch Deckung beweist man, daſs gleichgroſse Centriwinkel desselben Kreises auf gleichen Bogen stehen und umgekehrt. Dieselbe Deckung zeigt, daſs zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören. Die Kreislinie wird ebenso wie die ganze Umdrehung in 360 Grade geteilt, so daſs ein Centriwinkel ebenso viele Grade enthält wie der Bogen, auf dem er steht; man sagt deshalb, daſs ein Centriwinkel durch seinen Bogen gemessen wird. (Unterschied zwischen einem Bogengrade und einem Winkelgrade).

Ein Peripheriewinkel hat seinen Scheitelpunkt auf der Peripherie, und seine Schenkel sind Sehnen; derselbe enthält halb so viel Grade wie der Bogen, auf welchem er steht.



a) Geht der eine Schenkel durch den Mittelpunkt, so ziehe man einen Radius an den Endpunkt des anderen Schenkels; dann hat man

$$y = x + z \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

oder, da $x = z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$

$$y = 2x, \text{ woraus } x = \tfrac{1}{2}y.$$

Da nun y durch den ganzen Bogen AB gemessen wird, so wird x durch den halben Bogen AB gemessen, was man der Kürze wegen so schreibt:

$$x = \tfrac{1}{2}\widehat{AB}.$$

b) Liegen die Schenkel des Peripheriewinkels auf beiden Seiten des Kreismittelpunktes, so führt man diesen Fall auf den vorhergehenden zurück, indem man vom Scheitelpunkte aus einen Durchmesser zieht; dann hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\widehat{AB}; \; y = \tfrac{1}{2}\widehat{BC}, \; . \; . \; . \; (24,a),$$

woraus $x + y = \tfrac{1}{2}\widehat{AB} + \tfrac{1}{2}\widehat{BC} = \tfrac{1}{2}\widehat{AC}.$

c) Auf dieselbe Weise erhält man, wenn die beiden Schenkel auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen,

$$x + y = \tfrac{1}{2}\widehat{AC}; \; y = \tfrac{1}{2}\widehat{BC}, \; . \; . \; . \; (24,a),$$

woraus durch Subtraction

$$x = \tfrac{1}{2}\widehat{AB}.$$

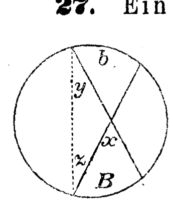
Der Satz gilt also in allen Fällen.

25. Da der Satz in 24 gilt, wie klein auch die eine Sehne werden mag, so mufs er auch gelten, wenn die Sehne unendlich klein wird, das heifst, wenn sie (verlängert) in eine Tangente übergeht. Ein Winkel, welcher von einer Sehne und einer Tangente gebildet wird, wird also durch die Hälfte des Bogens gemessen, welchen die Sehne abschneidet.

26. Aus diesen Sätzen folgt, dass ein Peripheriewinkel, welcher auf einem Durchmesser steht, ein Rechter ist, denn der Bogen, auf welchem er steht, beträgt 180°, und dafs die gegenüberliegenden

Winkel eines einbeschriebenen Vierecks Supplemente sind, denn sie stehen zusammen auf der ganzen Peripherie, welche 360° beträgt.

27. Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt innerhalb der Kreisperipherie liegt, wird durch die halbe Summe der beiden Bogen gemessen, auf welchen er und sein Scheitelwinkel stehen.

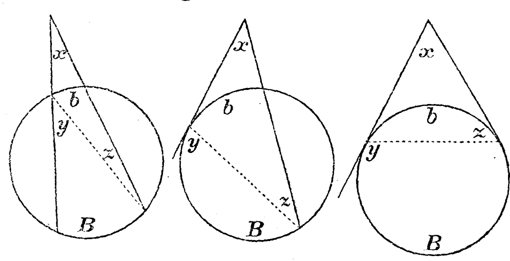


Denn $x = y + z$ . . (19)

und $y = \frac{1}{2}\widehat{B}$; $z = \frac{1}{2}\widehat{b}$ . . (24),

also $x = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(B + b)$.

28. Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt aufserhalb der Peripherie liegt, wird durch den halben Unterschied der beiden Bogen gemessen, welche die Schenkel zwischen sich fassen. Die Schenkel können zwei Secanten sein, eine Secante und eine Tangente, oder zwei Tangenten.



In allen Fällen hat man

$y = x + z$, oder $x = y - z$; . . . (19)

aber $y = \frac{1}{2}B$; $z = \frac{1}{2}b$ . . . . (24 und 25),

also $x = \frac{1}{2}(B - b)$.

In dem letzten Falle kann man für B den Wert $360° - b$ einsetzen, wodurch man erhält

$$x = \tfrac{1}{2}(360° - 2b) = 180° - b.$$

Ein solcher Winkel heifst ein Tangentenwinkel, und derselbe wird also gemessen durch den Unterschied zwischen 180° und seinem kleineren Bogen.

Zeichnet man verschiedene Winkel, welche auf einem Bogen AB stehen, so folgt aus 27 und 28, dass diejenigen, deren Scheitelpunkt aufserhalb des Kreises liegt, kleiner, diejenigen aber, deren Scheitelpunkt innerhalb des Kreises liegt, gröfser sind als der Peripheriewinkel auf AB.

Anmerkung. Gehen die Schenkel eines Winkels C beziehungsweise durch A und B, so kann man immer einen Kreis zeichnen, innerhalb dessen Peripherie C liegt. Man zeichne nämlich einen Halbkreis über AB als Durchmesser; ist $C > R.$, so liegt C innerhalb des Halbkreises; im entgegengesetzten Falle zeichne man einen Kreis durch A und B, dessen Mittelpunkt auf der Mitte des Halbkreises liegt; in diesem sind die Peripheriewinkel auf AB gleich $\frac{1}{2}$ R.; fährt man auf dieselbe Weise fort, so erhält man nach und nach Kreise, deren Peripheriewinkel $\frac{1}{4}$ R., $\frac{1}{8}$ R. u. s. w. sind; endlich mufs man dann einen Kreis erhalten, in dem die Peripheriewinkel auf AB kleiner als C sind, und dieser Kreis wird dann um C herumgehen.

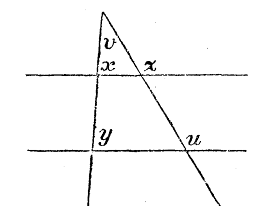
29. Die Schenkel eines Tangentenwinkels, vom Scheitelpunkte bis zum Berührungspunkte gerechnet, sind gleich lang; denn das Dreieck, welches entsteht, wenn man die Berührungspunkte verbindet, ist gleichschenklig, da die Winkel an der Grundlinie durch denselben Bogen gemessen werden (25). (Vergl. die letzte Figur zu 28.)

30. Eine Tangente steht senkrecht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius, denn der Winkel, den sie mit einander bilden, ist ein Rechter, da der Bogen 180° beträgt. (25.)

III. Parallele Linien.

31. Zwei Linien heifsen parallel (παρά-ἀλλήλων), wenn die gleichliegenden Winkel (wie x und y), welche sie mit einer sie schneidenden Geraden bilden, gleich grofs sind. «Parallel mit» bezeichnet man durch ‖.

Sind die gleichliegenden Winkel für eine schneidende Gerade gleich grofs, so sind sie es für jede. Da nämlich

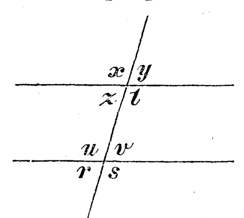


$$\left.\begin{array}{l} z = x + v, \\ u = y + v, \end{array}\right\} \ldots (19).$$

so ist $z = u$, wenn $x = y$.

32. Bei jedem Durchschnittspunkte hat man vier Winkel; sind die Linien parallel, so ist jeder spitze Winkel der einen Gruppe gleich jedem spitzen Winkel der anderen Gruppe, und Supplement jedes der stumpfen Winkel. Umgekehrt sind die Linien parallel, wenn eine von diesen Bedingungen erfüllt ist.

Man pflegt die Winkel x und y, r und s äufsere, und z, t, u und v innere Winkel zu nennen, und dieselben paarweise zusammenzustellen, einen von jedem Durchschnittspunkte. Ein äufserer nnd ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schneidenden (y und v, z und r, u. s. w.) heifsen correspondierende Winkel. Zwei innere oder zwei äufsere Winkel auf derselben Seite der Schneidenden (t und v, x und r, u. s. w.) heifsen Gegenwinkel, auf verschiedenen Seiten der Schneidenden (z und v, x und s, u. s.w) Wechselwinkel.



Zwei Linien sind also parallel in folgenden Fällen:

a) wenn zwei Wechselwinkel gleich sind,

b) wenn zwei correspondierende Winkel gleich sind,

c) wenn zwei Gegenwinkel Supplemente sind.

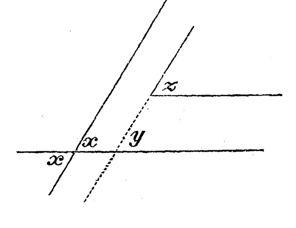
33. Parallele Linien können sich niemals schneiden.

Denn falls sie sich schnitten, würde man durch eine Linie, welche beide schneidet, ein Dreieck abschneiden, dessen einer Aufsenwinkel gleich einem der nicht anliegenden Dreieckswinkel sein würde; das steht aber in Widerspruch mit 19.

Umgekehrt sieht man, dafs die Linien sich einmal schneiden müssen, sobald x und y von einander verschieden sind; denn es sei A ein Punkt auf der einen, B ein Punkt auf der anderen Linie, AB die schneidende Gerade; man kann dann immer (28, Anm.) auf der Linie durch A innerhalb eines gewissen Kreises einen Punkt C finden, so dafs $\angle ACB = y - x$ (oder $x - y$); CB mufs dann aber mit der durch B gehenden Linie zusammenfallen, weil der Winkel, welchen sie mit AB bildet, gleich y ist; das heifst, die beiden durch A und B gehenden Linien müssen sich in einem Punkte C schneiden.

34. Winkel mit parallelen Schenkeln sind gleich grofs, wenn die Schenkel gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Verlängert man einen Schenkel des Winkels, bis er einen Schenkel des anderen Winkels schneidet, so hat man



$$\left.\begin{aligned} x &= y, \\ y &= z, \end{aligned}\right\} \dots (19)$$

also $\quad z = x.$

35. Durch Betrachtung der Winkel, welche parallele Linien mit einer schneidenden Linie bilden, sieht man leicht, dafs sich durch einen gegebenen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Linie ziehen läfst, und dafs

Zwei Linien, welche einer dritten Linie parallel sind, auch unter sich parallel sind.

Übungsaufgaben.

1. In einem Dreieck beträgt ein Winkel 75°, ein anderer 42°; wie grofs ist der dritte?

2. Zwei Winkel eines Dreiecks betragen jeder 42° 12′ 42″; wie grofs ist der dritte?

3. In einem Dreieck ist ein Winkel A, ein anderer B; wie grofs ist der dritte?

4. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 60°; wie grofs ist der Winkel an der Grundlinie?

5. Wie grofs ist der Winkel zwischen den Senkrechten auf zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks?

6. O ist ein Punkt innerhalb eines Dreiecks ABC; beweise, dafs $\angle AOB > \angle ACB$.

7. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 40°; beweise, dafs die Linie, welche den Aufsenwinkel an der Spitze halbiert, der Grundlinie parallel ist.

8. Wie grofs ist der Winkel zwischen den Linien, welche zwei Nebenwinkel halbieren?

9. Zwei Winkel eines Dreiecks betragen 40° und 80°; man halbiere den dritten Winkel und ziehe von seinem Scheitelpunkte eine Senkrechte (Höhe) auf die

gegenüberliegende Seite; wie grofs ist der Winkel zwischen der Höhe und der Winkelhalbierenden?

10. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine spitze Winkel v; wie gross ist der andere, und in welche Stücke teilt die vom Scheitelpunkte des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte den rechten Winkel?

11. Beweise, dafs der Winkel, welchen die Höhe auf dem einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie bildet, halb so grofs ist wie der Winkel an der Spitze.

12. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine Winkel 60°; dieser sei halbiert und zugleich die Höhe auf die Hypotenuse gefällt; beweise, dafs eins der entstandenen Dreiecke gleichseitig ist.

13. Die Schenkel eines Winkels stehen senkrecht auf den Schenkeln eines andern; beweise, dafs die beiden Winkel entweder gleich oder Supplemente sind.

14. In einem gleichschenkligen Dreiecke mit einem Winkel von 36° an der Spitze sei ein Winkel an der Grundlinie halbiert; beweise, dafs die beiden kleinen Dreiecke gleichschenklig sind, und drücke die Länge aller Linien in der Figur aus, wenn die Schenkel des gegebenen Dreiecks jeder gleich r, und die Grundlinie gleich t ist.

15. Ein Winkel eines Dreiecks sei v; wie grofs ist der Winkel zwischen den beiden Linien, welche die beiden anderen Dreieckswinkel halbieren?

16. Beweise, dafs ein Winkel eines Dreiecks ein Rechter ist, wenn die von seinem Scheitelpunkte bis an die Mitte der gegenüberliegenden Seite gezogene Linie halb so grofs ist wie diese.

17. Ist ein Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks 30°, so ist die kleinere Kathete halb so grofs wie die Hypotenuse.

18. Die Seite AB eines Dreiecks ABC ist bis D verlängert, so dafs $BD = BC$; beweise, dafs die Linie, welche den Winkel B halbiert, der Linie parallel ist, welche die Punkte D und C verbindet.

19. In jedem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe auf der Hypotenuse halb so grofs wie diese.

20. Die Aufsenwinkel eines Dreiecks sind halbiert, und dadurch drei Dreiecke gebildet, von denen jedes eine Seite mit dem gegebenen Dreiecke gemeinsam hat; beweise, dafs diese drei Dreiecke dieselben Winkel enthalten.

21. Vom dem einen Schenkel eines Winkels ABC schneidet man ein beliebiges Stück BA ab, und zieht darauf $AD \parallel BC$, so dass $AD = AB$; beweise, dafs die Linie BD den gegebenen Winkel halbiert.

22. In einem Dreiecke ABC schneiden sich die Halbierungslinien der Winkel A und B in O; man ziehe durch O die $DE \parallel AB$ und beweise, dafs $DE = AD + BE$.

23. Der Beweis des Lehrsatzes in 31 läfst sich nicht führen, sobald die beiden Linien xy und zu nicht bis zum Durchschnitte verlängert werden können; wie hat man in diesem Falle zu verfahren?

24. Zwei Winkel haben parallele Schenkel; man beweise, dafs die Halbierungslinien derselben entweder parallel sind oder senkrecht auf einander stehen.

25. Wie viele Diagonalen lassen sich in einem Vieleck mit n Seiten (einem n-eck) ziehen? $\left(\text{Antw. } \frac{n(n-3)}{2}.\right)$

26. Ein Winkel eines Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind, sei v; wie gross sind die übrigen? Wie grofs mufs der Winkel v sein, damit man um das Viereck einen Kreis beschreiben kann, und wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?

27. Es soll bewiesen werden, dafs die zu einem Bogen von 60° gehörige Sehne gleich dem Radius ist.

28. Von demselben Punkte einer Kreislinie sind zwei Sehnen gezogen, welche Bogen von beziehungsweise 120° und 80° abschneiden; wie grofs ist der Winkel zwischen den Sehnen?

29. In einem Kreise ist ein Durchmesser AB und eine Sehne CD von der Länge des Radius gezogen; wie grofs ist der Winkel zwischen AC und BD, und wie grofs der zwischen AD und BC?

30. In einem Dreiecke ABC ist $BC < BA$; mit dem Radius BC ist um B als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben, der CA in E, BA in D schneidet; beweise, dafs $\angle DEA = \frac{1}{2}B$ ist.

31. In einem rechtwinkligen Dreiecke ACB, wo $\angle C = R$, ist um C als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben, der durch die Mitte von AB geht, und die Hypotenuse oder ihre Verlängerung zum zweiten Male in D schneidet; beweise, dafs der spitze Winkel, welchen CD mit der Hypotenuse bildet, doppelt so grofs ist als einer der Dreieckswinkel.

32. Ein Kreis hat seinen Mittelpunkt auf der Peripherie eines anderen Kreises, und die beiden Kreise mögen sich in A und B schneiden; beweise, dafs der eine Bogen AB halb so viele Grade enthält wie einer der anderen Bogen AB.

33. In einem Kreise sind zwei gleiche Peripherie-

winkel BAC und DEF gezeichnet; beweise, dafs $BF \parallel CD$.

34. In einen Kreis mit dem Mittelpunkte O ist ein Dreieck ABC gezeichnet; D sei die Mitte des Bogens BC; beweise, dafs Winkel ADO gleich der halben Differenz zwischen B und C ist.

35. In einem Kreise sind zwei Sehnen EA und EB gezogen und bis C und D verlängert, so dass CD der Linie parallel ist, welche den Kreis in E berührt; man beweise, dafs die gegenüberliegenden Winkel des Vierecks $ABDC$ Supplemente sind.

36. Der eine Durchschnittspunkt zweier Kreise, von denen der erste durch B, der zweite durch C geht, sei A. Von A ist eine Linie gezogen, welche den ersten Kreis in D, den zweiten in E trifft; es ist nachzuweisen, dafs der Winkel zwischen BD und CE constant ist, das heifst, derselbe bleibt, in welcher Richtung immer die Linie von A aus gezogen ist.

37. Ein Kreis berührt eine Seite BC eines Dreiecks ABC und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten; beweise, dafs der Abstand der auf den Verlängerungen liegenden Berührungspunkte von A gleich dem halben Umfange des Dreiecks ist.

38. In einen Kreis ist ein Dreick ABC beschrieben, dessen Winkel bekannt sind; wie grofs ist der Winkel, welchen eine an A gezogene Tangente mit BC bildet?

39. Von einem Dreiecke sind durch Tangenten an den einbeschriebenen Kreis drei kleine Dreiecke abgeschnitten; beweise, dafs die Summe der Umfänge der drei Dreiecke gleich dem Umfange des gegebenen Dreiecks ist.

40. Es soll bewiesen werden, dafs die vier Linien, welche die Winkel eines beliebigen Vierecks halbieren, ein Viereck begrenzen, dessen gegenüberliegende Winkel Supplemente sind.

41. Zwei Kreise schneiden sich in A und B, und von A aus sind die Durchmesser AC und AD gezogen; beweise, dafs C, B und D auf einer geraden Linie liegen.

42. Ein Winkel hat seinen Scheitelpunkt aufserhalb eines Kreises; der eine Schenkel desselben geht durch den Mittelpunkt, und das aufserhalb des Kreises liegende Stück des anderen ist gleich dem Radius. Beweise, dafs von den Bogen, welche die Schenkel zwischen sich fassen, der gröfsere dreimal so grofs ist als der kleinere.

43. Durch jeden der Durchschnittspunkte zweier Kreise ist eine gerade Linie gezogen; beweise, dafs die Sehnen, welche die anderen Durchschnittspunkte derselben mit den Kreisen unter einander verbinden, parallel sind.

44. Zwei Kreise mit gleichen Radien schneiden sich; beweise, dafs dieselben sich gegenseitig in beziehungsweise gleiche Bogen teilen.

45. Um einen der Durchschnittspunkte von zwei gleichen Kreisen als Mittelpunkt ist ein Kreis beschrieben, welcher die beiden gegebenen Kreise schneidet. Beweise, dafs je zwei von den vier entstehenden Durchschnittspunkten mit dem zweiten Durchschnittspunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen.

46. Zwei gleiche Kreise schneiden sich in A und B; durch A ist eine Linie gezogen, welche die Kreise in

D und E schneidet; beweise, dafs DE durch einen Kreis über AB als Durchmesser halbiert wird.

47. Durch den einen Durchschnittspunkt zweier Kreise sind zwei Linien bis zum Durchschnitte mit den Peripherien gezogen; beweise, dafs die Sehnen, welche die Endpunkte dieser beiden Linien mit einander verbinden, denselben Winkel mit einander bilden, einerlei in welcher Richtung die beiden Linien gezogen sind.

IV. Beziehungen zwischen der Länge gerader Linien (Strecken).

36. Die Länge einer Strecke wird gemessen, indem man angiebt, wie oft dieselbe eine andere Strecke, die Einheit, welche als bekannt vorausgesetzt wird, enthält; als Längeneinheit (Mafs) dient das Meter (m); 1 m = 10 Decimeter (dm) = 100 Centimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm). 1000 m = 1 Kilometer (km). Die Zahl, welche angiebt, wie oft die Einheit in einer Strecke enthalten ist (sich auf derselben ohne Rest abtragen läfst), heifst Mafszahl der Strecke.

37. Der gröfseren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der gröfsere Winkel gegenüber.

Man schneide von der gröfseren Seite ein Stück $BD = BA$ ab und verbinde D mit A; dann ist

$\angle DAB = \angle BDA$,

aber $\angle A > \angle BAD$,

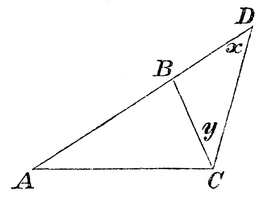
$\angle BDA > \angle C \ldots$ (19),

mithin $\angle A > \angle C$.

38. Dem gröfseren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die gröfsere Seite gegenüber.

Ist $\angle A > \angle C$, so ist $BC > BA$; denn, wenn dies nicht der Fall wäre, müfste entweder $BC = BA$ oder $BC < BA$ sein; aus dem ersteren würde aber folgen, dass $\angle A = \angle C$, aus dem letzteren, dass $\angle A < \angle C$; beides steht aber in Widerspruch mit der Voraussetzung.

39. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist gröfser als die dritte Seite.



Macht man $BD = BC$, so ist $x = y$, mithin $\angle ACD > x$; aber daraus folgt (38), dass $AD > AC$, oder $AB + BC > AC$.

Das gefundene Resultat kann man auch so schreiben:

$$AB > AC - BC,$$

so dafs in jedem Dreieck eine Seite gröfser ist als die Differenz der beiden andern.

40. Eine gerade Linie ist kürzer als jede gebrochene Linie, welche ihre Endpunkte verbindet.

$ACDEB > ADEB > AEB > AB$ . . . (39).

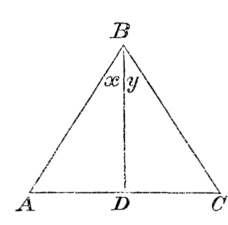
41. Von einem Punkte läfst sich nur eine Senkrechte auf eine Linie fällen, und diese ist kürzer als jede Schiefe, welche von demselben Punkte an die Linie gezogen ist.

Ist $BC \perp AC$, so kann nicht zugleich $BA \perp AC$ sein, da in einem Dreiecke nicht zwei Winkel Rechte sein können (18); ferner ist zufolge 38 $BA > BC$, da $\angle C > \angle A$.

Die Länge der Senkrechten heifst die Entfernung oder der Abstand des Punktes B von der Linie BC.

Der Punkt C, in welchem die von B gefällte Senkrechte die Linie AC trifft, heifst die Projection von B auf AC. Ist D die Projection eines anderen Punktes E, so heifst CD die Projection der Strecke BE.

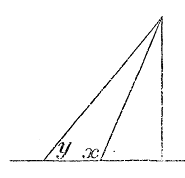
42. Zwei Schiefe, welche gleich viel von der Senkrechten abweichen, sind gleich lang.



Dafs die Schiefen BA und BC gleich viel abweichen, bedeutet entweder, dafs $\angle x = \angle y$, oder dafs $AD = DC$. In beiden Fällen mufs die eine Seite der Figur die andere decken, sobald sie um die Senkrechte umgeklappt wird.

43. Von zwei Schiefen, welche ungleich viel von der Senkrechten abweichen, ist diejenige die gröfsere, welche die gröfsere Abweichung hat.

Liegen beide Schiefen auf derselben Seite der Senkrechten, so folgt der Satz aus 38, da $\angle x > \angle y$; liegen sie auf verschiedenen Seiten, so lassen sie sich durch Umklappen auf dieselbe Seite bringen.



44. Jeder Punkt der Senkrechten auf der Mitte einer Strecke, der Mittelsenkrechten, ist von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt.

Der Satz folgt aus 42, da $AB = BC$.

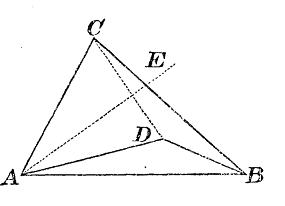
45. Jeder Punkt aufserhalb der Mittelsenkrechten einer Strecke liegt dem Endpunkte der Strecke am nächsten, der mit ihm auf derselben Seite liegt.

Fällt man die Senkrechte BD, so ist $AD > DC$, folglich $AB > BC$ (43).

Die Mittelsenkrechte einer Strecke enthält also alle Punkte, welche von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind, und keine anderen.

46. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, nicht aber in dem von diesen eingeschlossenen Winkel, so ist die dritte Seite in dem Dreiecke die gröfsere, welches den gröfseren Winkel enthält.

Die Dreiecke seien ACB und ADB, und dieselben seien so aufeinander gelegt, dafs die gleich grofsen Seiten AB zusammenfallen; dann ist $AD = AC$; zieht man die Mittelsenkrechte der CD, so mufs dieselbe durch A gehen (45, letzter Absatz); folglig ist $CB > DB$. (45.)



47. Höhe heifst die von einem Eckpunkte eines Dreiecks auf die gegenüber liegende Seite, die Grundlinie, gefällte Senkrechte. Ist ein Winkel an der Grundlinie ein Rechter, so fällt die Höhe mit einer der Dreiecksseiten zusammen, ist einer dieser Winkel stumpf, so fällt sie aufserhalb des Dreiecks. Aufser der Höhe lassen sich von jedem Eckpunkte eines Dreiecks

noch zwei bemerkenswerte Linien ziehen, nämlich die Mediane oder Mittellinie, welche den Eckpunkt mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, und die Winkelhalbierende.

Im gleichschenkligen Dreiecke fallen Höhe, Mediane und Winkelhalbierende der Spitze zusammen: denn wenn die Höhe nicht den Winkel an der Spitze oder die Grundlinie halbierte, müfsten die Schenkel des Dreiecks von ungleicher Länge sein (43).

48. Die Mitte einer Sehne, die Mitten der zugehörigen Bogen und der Kreismittelpunkt liegen alle auf einer Geraden, der Mittelsenkrechten der Sehne.

Denn alle Punkte liegen gleich weit von den Endpunkten der Sehne entfernt.

Übungsaufgaben.

48. Von allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser die gröfste.

49. Beweise, dafs die Bogen zwischen parallelen Sehnen eines Kreises gleich grofs sind.

50. Welches ist die gröfste und welches die kleinste Linie, welche man von einem Punkte an eine Kreisperipherie ziehen kann?

51. Von einem Punkte O innerhalb eines Dreiecks ABC sind Linien nach B und C gezogen; beweise, dass $OB + OC < AB + AC$.

52. Wenn in einem Kreise $\widehat{AB} < \widehat{AC}$ (beide Bogen sind $< 180°$ zu nehmen), so ist auch $AB < AC$. (46.)

53. Beweise, dafs jede Seite eines Dreiecks kleiner ist als der halbe Umfang.

54. In jedem umbeschriebenen Viereck ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Seisen gleich der Summe der beiden anderen. (29.)

55. Um einen aufserhalb eines Kreises gegebenen Punkt A als Mittelpunkt ist ein Kreis beschrieben, welcher durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises geht, und von O aus sind zwei Sehnen gezogen, die an Länge dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich sind. Beweise, dafs die Sehnen den gegebenen Kreis in den Punkten schneiden, in welchen die von A aus gezogenen Tangenten denselben berühren.

56. Beweise, dafs jedes Dreieck, welches ganz innerhalb eines anderen liegt, einen kleineren Umfang hat als dieses.

Beweise, dafs jedes convexe Polygon, welches ganz innerhalb eines anderen liegt, einen kleineren Umfang hat als dieses.

57. Von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks sind Linien an die drei Eckpunkte gezogen; beweise, dafs die Summe dieser drei Linien gröfser ist als der halbe, aber kleiner als der ganze Umfang des Dreiecks.

58. Von den Eckpunkten eines Dreiecks sind drei Linien so gezogen, dass je zwei von ihnen die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind, dessen Grundlinie von einer Seite des gegebenen Dreiecks gebildet wird; man soll beweisen, dass diese drei Linien sich in demselben Punkte schneiden. (Man nehme an, dass die drei Linien sich in drei Punkten schneiden, und drücke die Seiten des entstandenen Dreicks durch die Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke aus).

II. Kapitel.

I. Constructionen, Congruenz und Symmetrie.

49. Für die Construction von Figuren mit gewissen gegebenen Eigenschaften bedient man sich dem Herkommen gemäſs nur des Lineals, mit Hülfe dessen man durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie ziehen kann, und des Zirkels, mittelst dessen man eine Kreislinie mit gegebenem Mittelpunkt und gegebenem Radius zeichnen kann. Alle Constructionen müssen deshalb aus diesen beiden zusammengesetzt sein.

Damit ein Punkt bestimmt ist, müssen zwei Bedingungen gegeben sein, welche derselbe erfüllen soll; ist nur eine Bedingung gegeben, so giebt es unendlich viele Punkte, welche der Aufgabe genügen, und diese liegen alle auf einer gewissen geraden oder krummen Linie, welche der geometrische Ort des Punktes heiſst; aus dem Vorhergehenden folgt:

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist ein Kreis mit dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt und der gegebenen Entfernung als Radius.

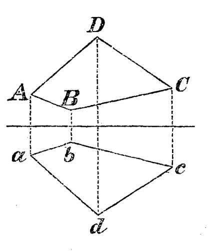
Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte (45).

Mehr geometrische Örter werden später Erwähnung finden.

Besteht die Aufgabe nun darin, einen Punkt zu bestimmen, so untersucht man, welche beiden geometrischen Örter den Bedingungen entsprechen, welche der Punkt durch seine Lage erfüllen soll; lassen sich diese beiden geometrischen Örter mit Hülfe von Zirkel und Lineal construieren, so kann man den Punkt finden, denn da er auf beiden liegen soll, muſs er dort liegen, wo sie sich schneiden; die Aufgabe hat also so viele Lösungen, als die geometrischen Örter Durchschnittspunkte haben.

50. Lassen sich gewisse Stücke nur auf einerlei Art zu einer Figur zusammensetzen, so müssen zwei Figuren, welche beide diese Stücke enthalten, congruent sein, denn wenn sie es nicht wären, so hätte man die Stücke auf zweierlei Art zusammengesetzt; lassen sich dagegen die Stücke zu verschiedenen Figuren zusammensetzen, so brauchen zwei Figuren mit diesen Stücken nicht congruent zu sein.

51. Zwei Figuren sind symmetrisch mit Beziehung auf eine gerade Linie, wenn jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der anderen Figur entspricht, welcher so liegt, daſs man auf ihn trifft, wenn man von dem ersten Punkte eine Senkrechte auf die gerade Linie fällt, und diese um sich selbst nach der anderen Seite hinaus verlängert; so entsprechen sich A und a, B und b, u. s. w. Symmetrische Figuren sind congruent, denn durch Umklappen um die gerade Linie, die Symmetrieaxe, gelangen sie beide zur Deckung; umgekehrt müssen zwei Figuren, welche durch



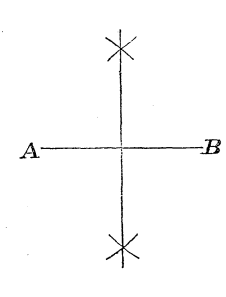
Umklappen um eine gerade Linie zur Deckung gebracht werden können, mit Beziehung auf diese symmetrisch

liegen. Als Beispiel für symmetrische Figuren mag angeführt werden, daſs die Höhe von der Spitze ein gleichschenkliges Dreieck symmetrisch teilt, daſs jeder Durchmesser einen Kreis symmetrisch teilt u. s. w.

Liegen zwei Paare von Figuren symmetrisch mit Beziehung auf dieselbe Axe, so müssen ihre Durchschnittspunkte auch symmetrisch liegen, denn bringt man die Figuren durch Umklappen zur Deckung, so müssen die Durchschnittspunkte auf einander fallen.

Bei der Construction einer Figur erhält man oft zwei symmetrische Lösungen, welche also congruent sind.

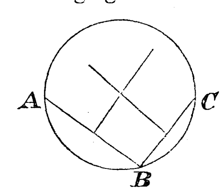
52. Die Mittelsenkrechte einer gegebenen Strecke zu zeichnen.



Beschreibt man um die Endpunkte der Strecke, A und B, als Mittelpunkte Kreise mit gleichen Radien, so müssen die Schnittpunkte derselben auf der gesuchten Linie liegen (45); hierdurch bestimmt man also zwei Punkte derselben, und zieht sie dann durch diese. Die Radien müssen gröſser als die Hälfte von AB genommen werden, damit die Kreise zum Durchschnitt kommen.

Durch dieselbe Construction wird eine Strecke halbiert.

53. Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte A, B und C geht.

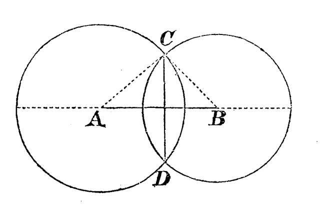


Der Mittelpunkt ist zu bestimmen; derselbe muſs gleich weit von A und B entfernt sein, also liegt er auf der Mittelsenkrechten von AB; ebenso liegt er auf der Mittel-

senkrechten von BC, und mufs also dort liegen, wo diese beiden sich schneiden; da man nur einen Durchschnittspunkt erhält, so läfst sich durch drei gegebene Punkte nur ein Kreis zeichnen. Liegen die drei Punkte auf einer geraden Linie, so werden die Mittelsenkrechten parallel und kommen also nicht zum Durchschnitt, so dafs die Lösung unmöglich ist; man pflegt zu sagen, dafs parallele Linien sich in unendlicher Entfernung schneiden, und dafs also durch drei Punkte, welche in gerader Linie liegen, ein Kreis gezeichnet werden kann, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt, und dessen Radius also unendlich grofs ist; man meint damit nichts anderes, als dafs man bei genügend weiter Entfernung des Mittelpunktes den Kreis dahin bringen kann durch zwei Punkte zu gehen und dem dritten so nahe zu kommen, wie man will.

Soll man den Mittelpunkt eines gegebenen Kreisbogens bestimmen, so bedient man sich derselben Construction, indem man drei beliebige Punkte des Bogens benutzt.

Hieraus folgt, dafs zwei Kreise sich nur in zwei Punkten schneiden können, denn wenn sie drei Punkte gemeinsam hätten, müfsten sie sich decken; die Linie, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heifst ihre Centrale; dieselbe teilt in ihrer Verlängerung beide Kreise symmetrisch, und steht also senkrecht auf der Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden Kreise (51). Zieht man Radien an einen der Schnittpunkte, so werden dieselben Seiten eines Dreiecks,



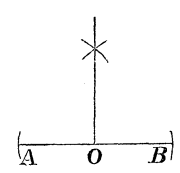
in welchem die Centrale die dritte Seite ist, und diese mufs also kleiner als die Summe und gröfser als die Differenz der beiden Radien sein, wenn die Kreise sich schneiden (39), während dieselbe gröfser als die Summe der Radien ist, wenn die Kreise aufserhalb einander liegen, und kleiner als die Differenz, wenn der eine Kreis innerhalb des anderen liegt.

Wird die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise unendlich klein, so dafs die Durchschnittspunkte in einen Punkt zusammenfallen, so heifst letzterer ein Berührungspunkt; derselbe mufs auf der Centrale liegen, denn solange ein Durchschnittspunkt der beiden Kreise auf der einen Seite der Centrale liegt, mufs ein ihm symmetrischer auf der anderen Seite liegen.

Hieraus ersieht man, dafs die Centrale gleich der Summe der beiden Radien ist, wenn die Kreise sich von aufsen berühren, und gleich der Differenz, wenn sie sich von innen berühren.

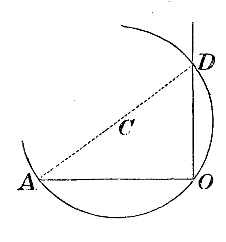
Umgekehrt müssen die Kreise sich berühren, sobald die Centrale gleich der Summe oder Differenz der beiden Radien ist.

54. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen Linie eine Senkrechte zu errichten.



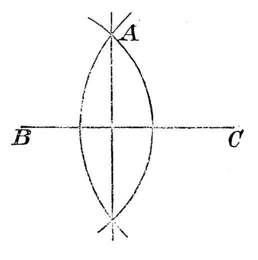
a) Von dem gegebenen Punkte O aus schneidet man nach beiden Seiten gleiche Stücke OA und OB ab. Darauf bestimmt man einen Punkt, welcher gleich weit von A und B entfernt ist; dieser mufs auf der gesuchten Linie liegen, und dieselbe läfst sich nun ziehen.

b) Ist der gegebene Punkt der Endpunkt der Linie, und läſst diese sich nicht gut verlängern, so zeichnet man um einen beliebigen Mittelpunkt C einen Kreis durch O; vom zweiten Durchschnittspunkte des Kreises mit der Linie zieht man den Durchmesser AD, und DO wird dann die Senkrechte sein. $\angle\ O$ ist nämlich ein Rechter, da er auf einem Durchmesser steht (26).



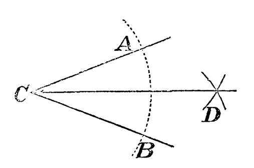
55. Von einem gegebenen Punkte A eine Senkrechte auf eine gegebene Linie BC zu fällen.

Um zwei beliebige Punkte der Linie als Mittelpunkte beschreibt man Kreise durch den gegebenen Punkt; die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der beiden Kreise ist dann die gesuchte Linie (53).



56. Einen gegebenen Winkel oder Kreisbogen zu halbieren.

Vom Scheitelpunkte C des Winkels beschreibt man den Bogen AB, und bestimmt darauf einen Punkt D, welcher gleich weit von A und B entfernt ist. CD halbiert dann sowohl den Winkel wie den Bogen, da sie nach der Construction senkrecht auf der Mitte der Sehne AB steht.

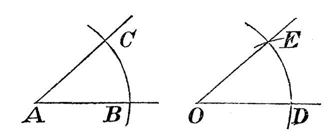


Ein beliebiger Winkel kann mittelst Zirkel und Lineal auf keine andere Weise in gleiche Teile geteilt werden

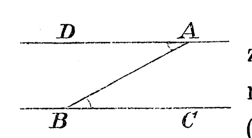
als durch fortgesetztes Halbieren, also nur in 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Teile.

57. In einem gegebenen Punkte einer Linie einen gegebenen Winkel anzutragen.

O ist der gegebene Punkt, A der gegebene Winkel; um O und A als Mittelpunkte beschreibt man mit gleichen Radien die Bogen BC und DE; macht man nun $\widehat{DE} = \widehat{BC}$, so ist $\angle O = \angle A$. (24.)



58. Durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

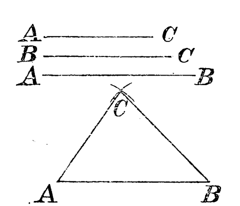


Von dem gegebenen Punkte A zieht man beliebig AB; macht man nun $\angle A = \angle B$, so ist $DA \parallel BC$ (32).

Durch Anwendung der vorhergehenden und dieser Construction kann man durch einen aufserhalb einer Geraden gegebenen Punkt eine Linie ziehen, welche mit der gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

59. Ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu construieren.

Man legt die Seite AB hin, das heifst, man schneidet von einer Geraden ein Stück gleich AB ab; der dritte Eckpunkt ist dann der Durchschnittspunkt zweier Kreise, deren Mittelpunkte A und B, und deren Radien die beiden anderen Seiten sind. Die Lösung ist möglich, sobald die Kreise sich schneiden, wenn also die eine Seite kleiner als die Summe und



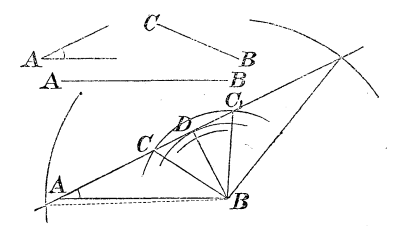
gröſser als die Differenz der beiden anderen ist. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten, aber die beiden Lösungen sind symmetrisch, so daſs also die drei Strecken nur auf einerlei Art zu einem Dreieck zusammengesetzt werden können. Hieraus folgt, daſs zwei Dreiecke congruent sind, wenn in ihnen alle drei Seiten beziehlich gleich sind.

60. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu construieren.

Man legt den Winkel hin und schneidet von den Schenkeln die gegebenen Seiten ab. Da die Aufgabe nur eine Lösung hat, so sind zwei Dreiecke congruent, wenn in ihnen ein Winkel und die denselben einschlieſsenden Seiten beziehlich gleich sind.

61. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel zu construieren.

Man legt AB hin und trägt in dem einen Endpunkt den gegebenen Winkel A an. Der Punkt C wird durch eine Kreislinie um B als Mittelpunkt und mit BC als Radius bestimmt; nun können verschiedene Fälle eintreten:



a) Ist BC kürzer als die Senkrechte BD, so kommen der Kreis und AD nicht zum Durchschnitt, und die Lösung ist unmöglich.

b) Ist $BC = BD$, so berührt der Kreis AD in D,

und es giebt eine Lösung, nämlich das rechtwinklige Dreieck ADB.

c) Ist $BC > BD$ aber $< BA$, so schneidet der Kreis AD in zwei Punkten, und die Aufgabe hat also zwei Lösungen.

d) Ist $BC = BA$, so fällt der eine Durchschnittspunkt auf A, und die eine Lösung giebt also kein Dreieck.

e) Ist $BC > BA$, so fällt der eine Durchschnittspunkt nach der entgegengesetzten Seite von A, und das diesem entsprechende Dreieck enthält nicht den gegebenen Winkel A, sondern dessen Nebenwinkel; in diesem Falle giebt es also nur eine Lösung.

Hieraus folgt, dafs zwei Dreiecke, welche einen Winkel, eine anliegende und die gegenüberliegende Seite beziehlich gleich haben, congruent sind, wenn die gegenüberliegende Seite gröfser als die anliegende oder gleich derselben ist, dafs es aber, wenn man dies nicht weifs, ungewifs ist, ob die Dreiecke congruent sind. Gewöhnlich spricht man den Satz kurz so aus: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel beziehlich gleich sind.

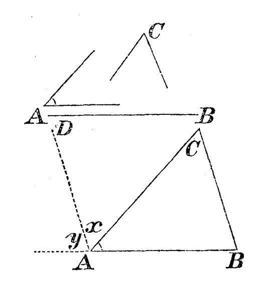
Beispiel. Beweise, dafs ein Punkt, welcher von zwei gegebenen Geraden gleiche Entfernung hat, auf einer von den beiden Linien liegt, welche die Winkel zwischen den gegebenen Geraden halbieren.

62. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu construieren.

Man legt die gegebene Seite hin, trägt in den Endpunkten derselben die gegebenen Winkel an, und verlängert

ihre Schenkel bis zum Durchschnitt. Die Lösung ist immer möglich, sobald die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als 2 R. ist. Da es nur eine Lösung giebt, so sind zwei Dreiecke congruent, wenn in ihnen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich sind.

63. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zu construieren.



Man legt AB hin und trägt Winkel A an, darauf macht man $\angle x = \angle C$; dann ist $\angle y = \angle B$, da die Summe der drei Winkel 2 R. beträgt. Nun zieht man BC parallel AD.

Die Bedingung für die Möglichkeit der Construction ist dieselbe wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Da es nur eine Lösung giebt, so sind zwei Dreiecke congruent, wenn in ihnen eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel beziehlich gleich sind.

Beispiel. Beweise, dafs jeder Punkt auf der Halbierungslinie eines Winkels gleiche Entfernung von den beiden Schenkeln des Winkels hat.

Aus diesem Satze und dem Satze im Beispiel zu 61 folgt, dafs der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Geraden gleiche Entfernung haben, von den beiden Linien gebildet wird, welche die Winkel zwischen den gegebenen Geraden halbieren.

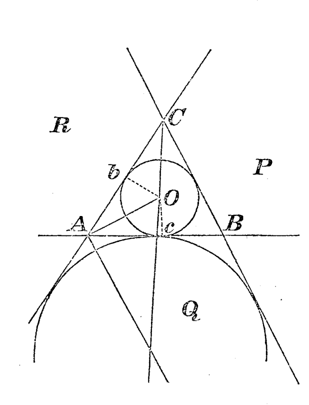
Ein gleichschenkliges Dreieck aus der

Grundlinie und dem Winkel an der Spitze zu construieren.

Man zeichnet ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck mit dem gegebenen Winkel an der Spitze, und trägt auf der Grundlinie desselben die gegebene Grundlinie AC ab; eine durch C gezogene Parallele zu dem einen Schenkel schneidet den anderen Schenkel in der Spitze des gesuchten Dreiecks.

64. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene gerade Linien berührt.

Für den Mittelpunkt des Kreises O hat man zwei geometrische Örter, nämlich die Linien, welche die Winkel A und C halbieren. Da der hierdurch gefundene Punkt O gleiche Entfernung von CA und AB, und von CA und CB hat, mufs er auch dieselbe Entfernung von CB und AB haben, und deshalb auch auf der Halbierungslinie des dritten Winkels liegen. Der hier construierte Kreis heifst der einbeschriebene Kreis des Dreiecks. Indessen sind hier nicht die vollständigen geometrischen Örter benutzt, da jeder derselben aus zwei geraden Linien besteht. Benutzt man auch die Linien, welche die Aufsenwinkel des Dreiecks halbieren, so bestimmt man die Mittelpunkte von drei Kreisen, welche die äufseren Berührungskreise des Dreiecks heifsen und in den Räumen P, Q und R liegen.



Die Entfernungen zwischen den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises und den

Eckpunkten des Dreiecks (die Seitenabschnitte) lassen sich auf einfache Weise durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken.

Ist nämlich $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, und nennt man der Kürze wegen den Umfang des Dreiecks $2s$, so hat man, wenn $Ac = x$, $Bc = y$, $Cb = z$, (29)

$$x + y = c;\ y + z = a;\ z + x = b.$$

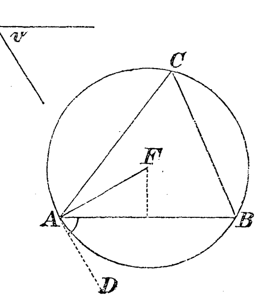
Hieraus folgt durch Addition und Division durch 2

$$x + y + z = s,$$

mithin $x = s - a;\ y = s - b;\ z = s - c.$

Aufserdem ist noch die Entfernung zwischen C und den Punkten zu merken, in welchen der äufsere Berührungskreis die Verlängerungen von CA oder CB berührt. Man sieht leicht, dafs die Summe dieser beiden Entfernungen gleich dem Umfange des Dreiecks ist, also ist jede von ihnen gleich s. (29.)

65. Über einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisbogen so zu zeichnen, dafs alle Peripheriewinkel desselben, welche auf der gegebenen Sehne stehen, einem gegebenen Winkel gleich sind.



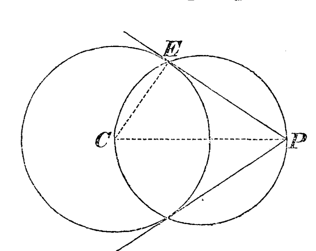
AB sei die gegebene Sehne und v der Winkel; da die Peripheriewinkel auf AB gleich v sein sollen, so mufs dasselbe von dem Winkel gelten, welcher von der Sehne und der an A gezogenen Tangente gebildet wird, denn dieser wird durch denselben Bogen gemessen; man macht deshalb $\angle BAD = v$, und bestimmt darauf den Kreismittelpunkt. Da AD nämlich Tangente sein mufs, so mufs der Kreis-

mittelpunkt auf der zu AD senkrechten Linie AF liegen, und also dort, wo diese die Mittelsenkrechte der Sehne schneidet. Ist der gegebene Winkel ein Rechter, so wird der Bogen ein Halbkreis.

Man sagt, dafs der Bogen oder der Abschnitt den gegebenen Winkel fafst, und dafs der Bogen der geometrische Ort für alle Punkte ist, von denen aus man die Strecke AB unter dem gegebenen Winkel sieht.

66. Von einem gegebenen Punkte Tangenten an einen Kreis zu ziehen.

Da die Tangente senkrecht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius stehen mufs und also $\angle\ CEP$ ein Rechter ist, so müssen die Berührungspunkte auf einem Kreise über CP als Durchmesser liegen. Liegt der gegebene Punkt P auf der Peripherie, so errichtet man eine Senkrechte auf dem nach P gezogenen Radius; liegt P innerhalb der Peripherie, so ist die Lösung unmöglich.



II. Polygone.

67. Die Sätze über Congruenz werden oft angewendet, wenn man beweisen soll, dafs zwei Stücke einer Figur gleich grofs sind. Man sucht dann in der Figur zwei Dreiecke zu finden oder durch Hülfslinien zu bilden, in denen diese Stücke als gleichliegende oder homologe Stücke vorkommen; kann man nun beweisen, dafs die Dreiecke congruent sind, so ist die Aufgabe gelöst. In

der Folge sollen, wenn angegeben wird, dafs zwei Dreiecke congruent sind, die Buchstaben in solche Reihenfolge gestellt werden, dafs die homologen Stücke an dieselbe Stelle kommen; wenn also $\triangle ABC \cong \triangle abc$, so ist $\angle A = a$, $B = b$, $C = c$, $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$.

68. Ein Viereck, in welchem ein Seitenpaar parallel ist, heifst ein Trapez.

Ein Viereck, in welchem beide Seitenpaare parallel sind, heifst ein Parallelogramm.

69. Die gegenüberliegenden Seiten und Winkel eines Parallelogramms sind gleich grofs.

$AB \parallel CD$, also $\angle x = y$,
$AD \parallel CB$, also $\angle v = z$;
folglich $\triangle ABC \cong CDA \ldots (62)$;
woraus $AB = CD$; $BC = DA$;
$\angle B = \angle D$.

Aus diesem Satze folgt, dafs Parallelen überall die gleiche Entfernung von einander haben, und dafs der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, von zwei Linien gebildet wird, welche der gegebenen Geraden in der gegebenen Entfernung parallel gezogen sind.

70. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind, ist ein Parallelogramm.

Man hat $AB = CD$,
$BC = DA$,
$AC = AC$,
also $\triangle ABC \cong CDA$,
und daraus $x = y$; $z = v$
oder $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.

71. Ein Viereck, in welchem ein Paar gegenüberliegender Seiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

Man erhält auch hier $\triangle ABC \cong CDA$ (60).

Aus diesem Satze folgt, dafs zwei gerade Linien parallel sind, wenn zwei Punkte der einen dieselbe Entfernung von der anderen haben (und auf derselben Seite liegen).

72. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Man hat $\angle A + B + C + D = 4$ R.,

aber $A = C$; $B = D$; (Voraussetzung)

also $2A + 2B = 4$ R.;

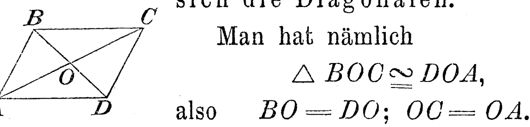
$A + B = 2$ R,

woraus folgt, dafs $BC \parallel AD$.

Ebenso ist $A + D = 2$ R.,

also $AB \parallel CD$.

73. In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.



Man hat nämlich

$\triangle BOC \cong DOA$,

also $BO = DO$; $OC = OA$.

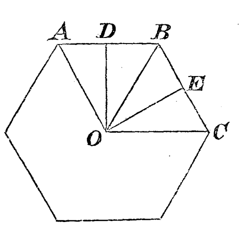
74. Von besonderen Parallelogrammen ist das rechtwinklige oder das Rechteck, und das gleichseitige oder der Rhombus zu erwähnen. Das Quadrat ist sowohl Rhombus wie Rechteck.

75. Eine regelmäfsige oder reguläre n-strahlige Figur ist eine solche, welche sich selbst deckt, wenn sie um einen gewissen Punkt, den Mittelpunkt, um einen Winkel von $\frac{4}{n}$ R. gedreht wird.

Correspondierende Punkte, Linien u. s. w. sind solche, welche durch die Drehung zur Deckung gelangen.

Verbindet man die correspondierenden Punkte der Reihe nach, so entsteht ein regelmäfsiges Vieleck (reguläres Polygon), welches also ein n-strahliges n-Eck ist; das reguläre Polygon ist convex; die nichtconvexen n-strahligen Polygone heifsen Sternpolygone.

76. In einem regulären Polygone sind alle Seiten und alle Winkel gleich grofs, denn sie gelangen nach und nach alle durch Drehung um den Mittelpunkt zur Deckung. Aus demselben Grunde sind die Verbindungslinien des Mittelpunkts mit den Eckpunkten, die grofsen Radien (OA), gleich grofs, und ebenso die vom Mittelpunkte auf die Seiten gefällten Senkrechten, die kleinen Radien (OD). Die grofsen Radien teilen das Polygon in congruente gleichschenklige Dreiecke, die Centraldreiecke (AOB); die Winkel derselben am Mittelpunkt heifsen Centriwinkel ($\angle AOB$).



Legt man n gleichschenklige congruente Dreiecke mit einem Winkel von $\frac{4}{n}$ R. an der Spitze an einander, so dafs ihre Spitzen zusammenfallen, so entsteht ein regelmäfsiges n-Eck; geht man von diesem aus, so kann man ein anderes regelmäfsiges n-Eck zeichnen, dessen Seiten gleich einer gegebenen Strecke sind. (63, letztes Stück.)

77. Jeder Winkel eines regelmäfsigen n-Ecks beträgt 2 R. $- \frac{4}{n}$ R.

Man erhält dieses Resultat, wenn man die Summe der Winkel, $2n$ R. — 4 R., durch ihre Anzahl dividiert.

78. Ein Polygon ist regelmäſsig, wenn alle Seiten und Winkel desselben gleich groſs sind.

Denn vergleicht man dasselbe mit einem regulären Polygone (76) von derselben Seitenzahl, dessen Seiten von derselben Gröſse sind, so sieht man, daſs die beiden congruent sind, da sie auch in den Winkeln übereinstimmen (77).

Im Vorhergehenden wurden von regulären Polygonen das gleichseitige Dreieck und das Quadrat erwähnt.

79. Teilt man eine Kreisperipherie in n gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte durch Sehnen, so entsteht ein regelmäſsiges einbeschriebenes n-Eck (Sehnenpolygon); zieht man Tangenten an alle Teilpunkte, so entsteht ein regelmäſsiges umbeschriebenes n-Eck (Tangentenpolygon). Denn läſst man die Figur eine $\frac{1}{n}$ Drehung um den Mittelpunkt machen, so wird sie sich in beiden Fällen selbst decken.

Übungsaufgaben.

59. In einem Quadrat $ABCD$ ist die Diagonale AC gezogen, und auf dieser $AE = AB$ abgetragen; in E ist auf der Diagonale eine Senkrechte errichtet, welche BC in F schneidet. Beweise, daſs $BF = FE = EC$.

60. In jedem Rechteck sind die beiden Diagonalen gleich groſs.

61. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander.

62. Verbindet man der Reihe nach die Mitten der Seiten eines Rhombus, so entsteht ein Rechteck.

63. Verbindet man der Reihe nach die Mitten der Seiten eines Rechtecks, so entsteht ein Rhombus.

64. Die Entfernung zweier Parallelen beträgt a; zwischen denselben ist eine Linie AB gezogen und man hat die beiden supplementären Winkel A und B halbiert; wie grofs ist die Höhe des hierdurch gebildeten rechtwinkligen Dreiecks?

65. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der rechte Winkel halbiert, und von dem Punkte, wo die Winkelhalbierende die Hypotenuse schneidet, sind Parallelen zu den Katheten gezogen. Man beweise, dafs die Figur, welche von diesen und den Katheten begrenzt wird, ein Quadrat ist.

66. C halbiert die Strecke AB. Die drei Punkte sind auf irgend eine Gerade in A_1, B_1 und C_1 projiciert; beweise, dafs C_1 die A_1B_1 halbiert.

67. Zwei Punkte, A und B, liegen auf derselben Seite einer Geraden. Von A zieht man eine Linie nach dem zu B symmetrischen Punkte C, welche die gegebene Gerade in D schneidet. Beweise, dafs AD und BD gleiche Winkel mit der gegebenen Geraden bilden.

68. Eine Linie ist einer Diagonale eines Parallelogramms parallel; beweise, dafs beide Seitenpaare des Parallelogramms gleiche Stücke auf derselben abschneiden.

69. Beweise, dafs die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats auf einer beliebigen Linie ein ebenso grofses Stück abschneiden, wie die beiden anderen auf einer zu der ersteren senkrechten Linie.

70. Über jeder Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist ein Quadrat gezeichnet, welches den rechten Winkel mit dem Dreieck gemeinsam hat, und von der

äufsersten Ecke dieser Quadrate sind Senkrechte auf die Hypotenuse gefällt; man beweise, dafs die Summe dieser beiden Senkrechten gleich der Hypotenuse ist.

71. Von einem Punkte auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind Senkrechte auf die beiden Schenkel gefällt. Beweise, dafs die Summe dieser beiden Senkrechten gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe ist.

72. Welche Parallelogramme lassen sich in, und welche um einen Kreis beschreiben?

73. Beweise, dafs sich ein Polygon construieren läfst, wenn alle Stücke desselben, mit Ausnahme von drei auf einander folgenden (1 Seite und 2 Winkel oder 2 Seiten und 1 Winkel), gegeben sind. Welche Sätze über Congruenz der Polygone würden hieraus folgen?

74. In einen Sector von 60° ist ein Kreis beschrieben; beweise, dafs der Radius desselben der dritte Teil vom Radius des Kreises ist, welchem der Sector angehört.

75. Welches ist die längste Linie, welche sich zwischen den Peripherien zweier Kreise durch einen ihrer Durchschnittspunkte ziehen läfst?

76. Zwei gegebene Linien schneiden sich in O. Auf der einen ist ein Punkt A, auf der anderen ein Punkt B beliebig angenommen, und darauf ein Dreieck ABC mit gegebenen Winkeln construiert. Der Winkel C ist dem Winkel bei O gleich und liegt mit ihm auf derselben Seite von AB. Man soll beweisen, dafs C immer auf derselben durch O gehenden Geraden liegt, wie man auch A und B wählen mag.

77. Ein Punkt ist mit dem Mittelpunkte eines

Kreises verbunden, und über dieser Verbindungslinie als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Beweise, dafs die Peripherie des letzteren alle Sehnen halbiert, welche durch den gegebenen Punkt gehen.

78. Ein Kreis berührt beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und zwar die eine in ihrem Endpunkt; beweise, dafs das Stück, welches dieser Kreis von der Hypotenuse abschneidet, doppelt so grofs als die Höhe des Dreiecks ist.

79. Durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Parallelogramms sind zwei Parallelen zu den Seiten desselben gezogen. Beweise, dafs von den entstehenden vier kleinen Parallelogrammen die beiden gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht.

80. Verlängert man die Höhen eines Dreiecks über ihren Fufspunkt bis an die Peripherie des um das Dreieck beschriebenen Kreises, so ist die Verlängerung gleich dem unteren Abschnitt (vom Durchschnittspunkte bis zum Fufspunkte gerechnet) der betreffenden Höhe.

81. Ein Dreieck ist in zwei andere Dreiecke durch eine Linie geteilt, welche einen Eckpunkt mit dem Punkte verbindet, in welchem der einbeschriebene Kreis die gegenüberliegende Seite berührt. Man beweise, dafs die einbeschriebenen Kreise dieser beiden Dreiecke die Seite, welche beiden Dreiecken gemeinsam ist, in demselben Punkte berühren.

82. Durch den Scheitelpunkt eines Winkels und durch einen auf der Halbierungslinie dieses Winkels gegebenen Punkt ist ein Kreis beschrieben; beweise, dafs die Summe der beiden Sehnen, welche der Kreis von den Schenkeln des Winkels abschneidet, constant ist.

83. Über den drei Seiten eines Dreieck sind nach

innen Kreisbogen beschrieben, welche Winkel von 120° fassen; beweise, dafs diese drei Kreisbogen durch denselben Punkt gehen.

84. Über den drei Seiten eines Dreiecks sind nach aufsen gleichseitige Dreiecke gezeichnet. Beweise, dafs die drei Linien, welche die äufsersten Eckpunkte dieser Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des gegebenen Dreiecks verbinden, 1) gleich sind, 2) sich gegenseitig unter Winkeln von 120° schneiden, und 3) durch denselben Punkt gehen.

85. Sind die gegenüberliegenden Winkel eines Vierecks Supplemente, so läfst sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

86. Über den drei Seiten eines Dreiecks sind nach aufsen Quadrate gezeichnet; man beweise, dafs die drei Linien, welche die Endpunkte der äufsersten Quadratseiten mit einander verbinden, doppelt so grofs sind wie die Medianen des Dreiecks und senkrecht auf diesen stehen.

87. Beweise, dafs die Höhen eines Dreiecks die Winkel des Dreiecks halbieren, dessen Eckpunkte die Fufspunkte der drei Höhen sind (mit Hülfe von Kreisvierecken). Zeige mit Hülfe dieses Satzes, dafs die drei Höhen sich in einem Punkte schneiden.

88. An einen Kreis mit dem Mittelpunkte O ist eine beliebige Tangente gezogen, welche eine durch O gehende feste Linie in M schneidet; auf der Tangente schneide man $MP = MO$ ab. Welches ist der geometrische Ort für P?

89. In einen gegebenen Kreis ist ein Dreieck beschrieben, von dem zwei Eckpunkte fest liegen, während der dritte sich auf der Peripherie des Kreises bewegt.

Welches sind die geometrischen Örter für den Durchschnittspunkt der Höhen und für den Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises?

90. AB ist eine festliegende Sehne, C ein beweglicher Punkt auf der Peripherie des Kreises. AC ist bis D verlängert, so dafs $CD = CB$. Man suche den geometrischen Ort für D.

91. Von einem beliebigen Punkte auf der Peripherie eines Kreises sind Linien an die Eckpunkte eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gezogen; zeige, dafs eine von diesen Linien gleich der Summe der beiden anderen ist.

92. Zwei Männer, welche beide in der Nähe eines Sees wohnen, besitzen gemeinschaftlich ein Boot. Wo mufs dasselbe liegen, damit beide gleich weit bis dahin haben?

93. Ein Dreieck zu construieren aus einem Winkel, der gegenüberliegenden Seite und der Mediane zu einer der anderen Seiten. (Suche den Mittelpunkt dieser Seite, nachdem die gegebene Seite festgelegt ist).

94. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht oder zwei gegebene Gerade berührt.

95. Ein Dreieck zu construieren aus einer Seite und der zugehörigen Höhe und Mediane.

96. Ein Dreieck zu construieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und dem gegenüberliegenden Winkel.

97. Ein Viereck $ABCD$ zu construieren aus AB, BC, AC, BD und $\angle D$.

98. Ein einbeschriebenes Viereck $ABCD$ zu construieren aus $\angle A$, AB, AC und BD.

99. Gegeben ist eine Gerade, auf derselben ein

Punkt A, und außerhalb derselben ein Punkt P. Auf der gegebenen Geraden soll ein solcher Punkt X bestimmt werden, daſs $AX + XP$ gleich einer gegebenen Strecke ist.

100. Auf einer gegebenen Geraden soll ein Punkt so bestimmt werden, daſs die von ihm an zwei auf derselben Seite der Geraden liegende Punkte gezogenen Linien gleiche Winkel mit der gegebenen Geraden bilden. (Aufgabe 67.)

101. In einen gegebenen Sector einen Kreis zu beschreiben.

102. In einem gegebenen Kreise eine Sehne zu ziehen, welche einer gegebenen Strecke gleich und parallel ist.

103. Für die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben: ein Punkt auf jeder der Katheten, zwei Punkte der Hypotenuse und die Höhe.

104. Ein Dreieck zu construieren, wenn die Mittelpunkte der drei äuſseren Berührungskreise gegeben sind. (Aufgabe 87.)

105. Die Seiten eines Quadrats sind in zwei Stücke m und n geteilt, so daſs zwei gleiche Stücke nirgends zusammenstoſsen. Beweise, daſs das Viereck, dessen Eckpunkte auf den vier Teilungspunkten liegen, ein Quadrat ist. (Durch Drehung um 90°.)

106. In einem regelmäſsigen Fünfeck sind alle Diagonalen gezogen; beweise, daſs dieselben ein neues regelmäſsiges Fünfeck einschlieſsen.

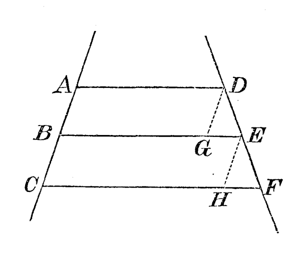
107. Beweise, daſs zwei Diagonalen eines regelmäſsigen Sechsecks parallel sind, daſs eine dritte Diagonale senkrecht auf diesen steht und zwei Sechsecksseiten

parallel läuft, und dafs drei von den Diagonalen ein gleichseitiges Dreieck bilden.

III. Kapitel.

I. *Ähnliche Figuren.*

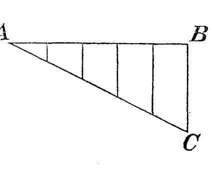
80. Schneiden mehrere Parallelen auf einer geraden Linie gleiche Stücke ab, so sind auch die Stücke, welche sie auf jeder anderen Geraden abschneiden, gleich grofs.



Ist $AB = BC$, und zieht man DG und EH parallel AC, so hat man $DG = AB$ und $EH = BC$ (69),
also $DG = EH$.
Ferner ist $\angle D = \angle E$ .. (31),
und $\angle G = \angle H$ .. (35),
mithin $\triangle DGE \cong EHF$,
und folglich $DE = EF$.

81. Eine Strecke AB in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Soll AB beispielsweise in 5 gleiche Teile geteilt werden, so trägt man auf einer durch A gezogenen beliebigen Geraden 5 gleiche Stücke ab. Den Endpunkt C des letzten Stücks verbindet man mit B, und zieht durch die übrigen Teilpunkte Parallelen zu BC. Die Abschnitte auf AB sind dann gleich grofs. (80.)

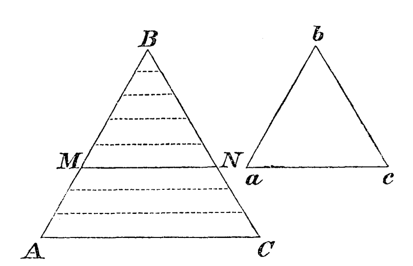


82. Zwei Dreiecke, welche in den Winkeln übereinstimmen, heifsen ähnlich. «Ähnlich» wird durch $\sim$ bezeichnet. Die Buchstaben an den Scheitelpunkten gleicher Winkel werden an dieselbe Stelle gestellt. Homologe Seiten sind solche, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; die Buchstaben, durch welche dieselben bezeichnet werden, schreibt man bei beiden Dreiecken in derselben Reihenfolge; ist z. B.

$$\triangle ABC \sim abc,$$

so ist $\angle A = a$, $B = b$, $C = c$, und AB, BC und AC sind beziehungsweise ab, bc und ac homolog.

83. In ähnlichen Dreiecken stehen je zwei homologe Seiten in demselben Verhältnis. (Die Seiten derselben sind proportional.)



Man legt das Dreieck abc so auf ABC, dafs $\angle b$ den $\angle B$ deckt, a auf M und c auf N fällt; dann ist $NM \parallel AC$, da $\angle M = \angle a = \angle A$.

Nun haben BM und BA entweder ein gemeinschaftliches Mafs oder nicht.

a) Haben dieselben ein gemeinschaftliches Mafs, (sind sie commensurabel), das heifst, giebt es eine Strecke, welche sich auf beiden ohne Rest abtragen läfst, so trägt man diese auf beiden ab; dieselbe sei beispiels-

weise p mal in BA und q mal in BM enthalten; dann hat man

$$\frac{BA}{BM} = \frac{p}{q}.$$

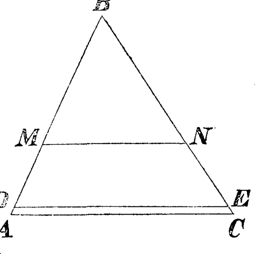
Zieht man nun durch die Teilpunkte Parallelen zu AC, so werden diese BC und BN beziehungsweise in p und q gleiche Teile teilen (80); also hat man auch

$$\frac{BC}{BN} = \frac{p}{q},$$

und folglich
$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN},$$

oder
$$\frac{BA}{ba} = \frac{BC}{bc}.$$

β) Haben BM und BA kein gemeinschaftliches Maſs (sind sie incommensurabel), so teilt man BM in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, und trägt diese von M aus auf MA weiter ab. Der letzte Teilpunkt zwischen M und A möge auf D fallen. Dann zieht man $DE \parallel AC$. Nun ist nach dem Vorhergehenden



$$\frac{BD}{BM} = \frac{BE}{BN},$$

oder
$$\frac{BA - DA}{BM} = \frac{BC - EC}{BN},$$

oder
$$\frac{BA}{BM} - \frac{DA}{BM} = \frac{BC}{BN} - \frac{EC}{BN}.$$

Da man nun BM in beliebig kleine Teile teilen kann, so kann man die Reste DA und EC, und daher auch die Quotienten $\frac{DA}{BM}$ und $\frac{EC}{BN}$ so klein machen, wie

man will, also kleiner als irgend eine angebbare Zahl, und dann mufs also

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN}$$

sein *).

Das Verhältnis von zwei commensurablen Strecken (und Gröfsen überhaupt) heifst ein rationales, das von zwei incommensurablen ein irrationales.

Anmerkung. Der oben geführte Beweis gilt nicht nur für diesen Fall, sondern zeigt im allgemeinen, dafs zwei Arten von Gröfsen, welche proportional sind, wenn ihre Verhältnisse rational sind, es ebenfalls sein müssen, wenn ihre Verhältnisse irrational sind.

Auf dieselbe Weise erhält man, indem man c auf C legt

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CA}{ca},$$

folglich

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CA}{ca}.$$

84. Durch das Voranstehende ist zugleich bewiesen, dafs eine Linie, welche einer Seite eines Dreiecks parallel ist, von den beiden anderen Seiten proportionale Stücke abschneidet.

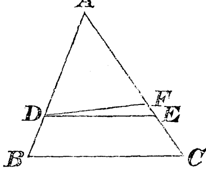
Umgekehrt: Schneidet eine Linie von zwei Seiten eines Dreiecks Stücke ab, welche den ganzen Seiten proportional sind, so ist sie der dritten Seite parallel.

---

*) Der diesem Beweise zu Grunde gelegte Satz läfst sich folgendermafsen kurz fassen: A, α, B und β sind gleichartige Gröfsen, und von diesen sind α und β veränderlich. Besteht nun die Beziehung $A \pm \alpha = B \pm \beta$, und kann man α und β gleichzeitig so klein machen, wie man will, so mufs $A = B$ sein.

Vor.: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$,

Beh. $DE \parallel BC$.



Denn wenn DE nicht parallel BC wäre, so müfste man durch D eine andere Linie ziehen können, die diese Bedingung erfüllt, z. B. DF; daraus würde aber folgen, dafs

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

was der Voraussetzung widerstreitet.

In Folge eines Satzes aus der Lehre von den Proportionen kann die Proportion

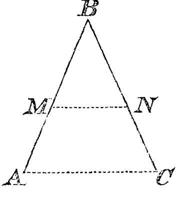
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

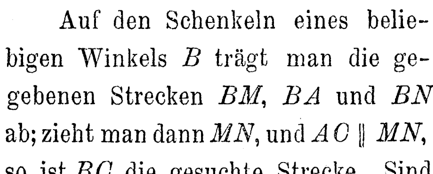
umgeformt werden in $\frac{AD}{AB - AD} = \frac{AE}{AC - AE}$

oder $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

so dafs auch diese Proportion gilt, wenn $DE \parallel BC$, und umgekehrt.

85. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu construieren, das heifst, eine Strecke, welche das vierte Glied einer Proportion ist, in der die drei übrigen Glieder von den gegebenen Strecken gebildet werden.





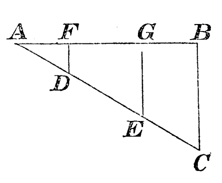
Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels B trägt man die gegebenen Strecken BM, BA und BN ab; zieht man dann MN, und $AC \parallel MN$, so ist BC die gesuchte Strecke. Sind die beiden Mittelglieder der Proportion gleich grofs, so heifst die gesuchte

Strecke die dritte Proportionale zu den gegebenen und wird auf dieselbe Weise construiert. Sind die gegebenen Strecken a, b und c, die gesuchte x, so hat man $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Buchstaben die benannten oder die unbenannten Zahlen bedeuten, welche die Länge der Strecken, gemessen nach derselben Einheit, ausdrücken $\left(\text{z. B. } \frac{5\text{ m}}{7\text{ m}}=\frac{5}{7}\right)$; schreibt man die Gleichung dagegen $x=\frac{bc}{a}$, so kann es nur auf die letztere Weise verstanden werden, da es keinen Sinn hat, benannte Zahlen mit einander zu multiplicieren.

Mit Hülfe des vorangehenden Satzes läfst sich nun ferner $x=\frac{abc}{de}$ construieren, indem man erst $y=\frac{ab}{d}$ und darauf $x=\frac{yc}{e}$ construiert; man sieht leicht, wie sich dies auf $x=\frac{abcd\ldots.}{efg\ldots.}$ ausdehnen läfst, sobald im Dividendus eine Strecke mehr ist als im Divisor.

86. Eine gegebene Strecke in Stücke zu teilen, welche sich zu einander wie gegebene Strecken oder Zahlen verhalten.

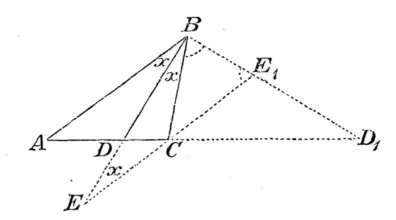
Die Teile von AB sollen sich zu einander verhalten wie die Strecken AD, DE und EC, welche auf einer beliebigen durch A gezogenen Geraden abgetragen sind; man zieht BC und parallel dazu EG und DF, dann ist



$$\frac{BG}{CE}=\frac{GA}{EA}=\frac{GF}{ED}=\frac{FA}{DA} \quad \ldots . \; (84).$$

Sind Zahlen gegeben, so wählt man eine beliebige Strecke als Einheit, und trägt dieselbe so oft ab, wie die Zahlen angeben.

87. Die Linie, welche einen Winkel eines Dreiecks halbiert, teilt die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, welche sich wie die beiden anderen Dreiecksseiten verhalten.



Zieht man $CE \parallel AB$, so ist

$$\triangle ABD \sim CED,$$

also
$$\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD},$$

aber
$$CE = CB \quad . \; . \; . \; . \; (21),$$

folglich
$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{DC}.$$

Die Linie, welche den Aufsenwinkel bei B halbiert, schneidet die verlängerte AC in einem Punkte D_1. Setzt man D_1 und E_1 an die Stelle von D und E, so folgt ganz ebenso wie oben, dafs $\frac{AB}{CB} = \frac{AD_1}{D_1 C}$. Man sagt, dafs AC durch D_1 und D aufsen und innen nach demselben Verhältnis geteilt wird, oder dafs AC durch D und D_1 harmonisch nach dem Verhältnis $\frac{AB}{BC}$ geteilt wird.

Sind die Seiten des Dreiecks a, b und c, so hat man

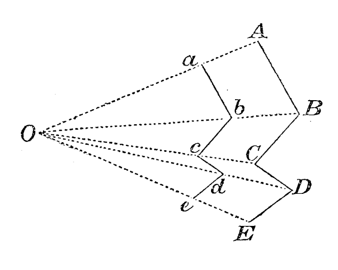
$$\frac{AD}{c} = \frac{DC}{a} = \frac{b}{c + a};$$

$$\frac{AD_1}{c} = \frac{D_1 C}{a} = \frac{b}{c - a},$$

folglich
$$AD = \frac{cb}{c+a};$$
$$DC = \frac{ab}{c+a};$$
$$AD_1 = \frac{cb}{c-a};$$
$$D_1C = \frac{ab}{c-a}.$$

88. Zwei Figuren (Systeme von Punkten) heifsen ähnlich im Verhältnis m, wenn jedem Punkt der einen Figur ein Punkt der anderen Figur entspricht (homologe Punkte), und die Entfernung zwischen zwei Punkten der einen Figur überall m mal so grofs ist als die Entfernung zwischen den homologen Punkten der anderen Figur. Für $m = 1$ sind die Figuren congruent.

Dafs es immer eine Figur $abcd\ldots.$ giebt, welche einer gegebenen Figur $ABCD\ldots.$ in einem gegebenen Verhältnis ähnlich ist, läfst sich folgendermafsen zeigen:



Von einem beliebigen Punkte O zieht man Linien an die Eckpunkte der gegebenen Figur und trägt auf diesen $Oa = m \,.\, OA$, $Ob = m \,.\, OB$ u. s. w. ab. a, b, c, d sind dann die Eckpunkte der gesuchten Figur.

O ist der Ähnlichkeitspunkt, die von O aus gezogenen Linien heifsen Ähnlichkeitsstrahlen. Man sagt, dafs die Figuren ähnlich gegen einander liegen. Über ähnlichliegende Figuren gelten folgende Sätze:

Homologe Punkte liegen auf demselben Ähnlichkeitsstrahl in Folge der Construction.

Homologe Linien (die Verbindungslinien homologer Punkte) sind parallel, z. B.

$$ab \parallel AB \ldots . (84).$$

denn
$$\frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB} = m.$$

Homologe Strecken sind proportional nach dem Verhältnis m, z. B.

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Oa}{OA} = m \ldots (83).$$

Dies gilt auch von gebrochenen Linien, denn wenn jede einzelne Linie m mal so grofs wird, so mufs ihre Summe auch m mal so grofs werden.

Homologe Winkel sind gleich (35).

Die Figur, welche man erhält, bleibt dieselbe, wo man auch den Ähnlichkeitspunkt annehmen mag, denn hätte man mit Hülfe eines anderen Ähnlichkeitspunktes eine Figur $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ construiert, so müfste diese mit $abcd \ldots$ in allen homologen Linien und Winkeln der Reihe nach übereinstimmen, und die beiden Figuren müssen folglich congruent sein.

Liegen gewisse Punkte der einen Figur auf einer Geraden, so müssen die homologen Punkte der anderen Figur gleichfalls auf einer Geraden liegen.

Dies ergiebt sich leicht, wenn man sich den Ähnlichkeitspunkt auf der Geraden gewählt denkt.

Die Punkte homologer Linien sind also paarweise homolog.

Liegen gewisse Punkte der einen Figur auf einer Kreislinie, so gilt dasselbe von den homologen Punkten der anderen Figur.

Der Satz folgt leicht, wenn man sich den Mittelpunkt des Kreises als Ähnlichkeitspunkt denkt.

Oben wurden Dreiecke mit gleichen Winkeln ähnlich genannt; da sich solche Dreiecke auch in ähnliche Lage bringen lassen (vergl. die Figur zu 83), so sind sie also auch ähnlich in der allgemeinen Bedeutung des Worts.

89. Kennt man die Fälle, in welchen zwei Figuren congruent sind, so kann man daraus die Fälle ableiten, in welchen sie ähnlich sind. Man braucht nämlich nur in dem für die Congruenz bewiesenen Satze «ähnlich» statt «congruent» zu lesen, wenn man gleichzeitig bei den Seiten «gleich» durch «proportioniert» ersetzt; es soll dies auf Dreiecke angewendet werden.

90. Aus dem Satze:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen alle drei Seiten beziehlich gleich sind,

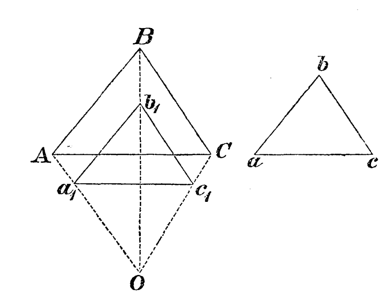
ergiebt sich der neue Satz:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen alle drei Seiten proportioniert sind.

$$\text{Vor. } \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC} = m.$$

Man wähle einen beliebigen Ähnlichkeitspunkt O und construiere $\triangle\, a_1 b_1 c_1 \sim \triangle\, ABC$ im Verhältnis m, wo m den Wert der gleichen Verhältnisse bedeutet; dann ist

$$\frac{a_1 b_1}{AB} = \frac{b_1 c_1}{BC} = \frac{a_1 c_1}{AC} = m.$$



Diese Verhältnisse sind den gegebenen einzeln gleich, und da die Divisoren paarweise gleich sind, müssen die Dividenden auch gleich sein, mithin

$$a_1b_1 = ab;\ b_1c_1 = bc;\ a_1c_1 = ca.$$

Die beiden kleinen Dreiecke sind also congruent, und da das eine dem grofsen Dreieck ähnlich ist, mufs das andere demselben gleichfalls ähnlich sein.

91. Aus dem Satze:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen ein Winkel und die denselben einschliefsenden Seiten beziehlich gleich sind,

ergiebt sich der neue Satz:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen ein Winkel gleich und die denselben einschliefsenden Seiten proportioniert sind.

Vor. $\angle A = \angle a;\ \frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = m.$

Durch dieselbe Construction wie oben hat man

$$\angle a = \angle A;\ \frac{a_1b_1}{AB} = \frac{a_1c_1}{AC} = m,$$

woraus durch Vergleichung mit dem Gegebenen:

$$\angle a = \angle a_1;\ ab = a_1b_1;\ ac = a_1c_1,$$

also $\triangle abc \cong \triangle a_1b_1c_1,$

und $\triangle abc \sim \triangle ABC.$

92. Aus dem Satze:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel beziehlich gleich sind,

ergiebt sich der neue Satz:

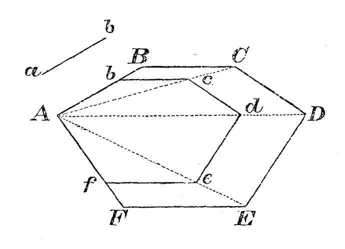
Zwei Dreicke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Seiten proportioniert sind, und der

der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel gleich ist.

Der Beweis ist ganz ebenso wie bei dem vorhergehenden Satze.

93. Auf dieselbe Weise zeigt man, dafs zwei Figuren, in denen alle homologen Winkel gleich und alle Seiten proportioniert sind, sich in ähnliche Lage bringen lassen; solche Figuren lassen sich also durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen. Enthält die Bedingung für die Congruenz zweier Polygone nur eine Seite, so fällt diese bei der Bedingung für die Ähnlichkeit fort. Danach sind alle regulären Polygone von gleicher Seitenzahl ähnlich.

94. Eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich ist, so dafs eine von ihren Seiten einer gegebenen Strecke gleich ist.



$ABCDEF$ sei die gegebene Figur und ab die gegebene Strecke, welche in der Figur der AB homolog sein soll; man macht $Ab = ab$, verbindet A mit den Eckpunkten der Figur, und zieht $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ u. s. w. Dann ist $Abcdef$ die gesuchte Figur, denn sie liegt ähnlich gegen $ABCDEF$, und A ist der Ähnlichkeitspunkt.

Hiernach kann man ein regelmäfsiges n-Eck mit gegebenen Seiten zeichnen, sobald man ein beliebiges regelmäfsiges n-Eck zeichnen kann. (Vergl. 76.)

Übungsaufgaben.

108. Vom Mittelpunkte eines Kreises sind Senkrechte auf zwei Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks gefällt. Beweise, dafs die Linie, welche die Fufspunkte der beiden Senkrechten verbindet, halb so grofs ist wie die dritte Seite des Dreiecks.

109. In einem Parallelogramm $ABCD$ ist E die Mitte von AB, und F die Mitte von CD. Zeige, dafs DE und BF die AC in drei gleiche Teile teilen.

110. Die Mitten der vier Seiten eines Vierecks sind der Reihe nach mit einander verbunden; beweise, dafs das entstandene Viereck ein Parallelogramm ist. Hieraus läfst sich ein neuer Satz bilden, wenn man die Diagonalen als Seiten, und ein Paar gegenüberliegender Seiten als Diagonalen betrachtet. (Uneigentliche Vierecke.)

111. Beweise, dafs die Höhen eines Dreiecks den zugehörigen Seiten umgekehrt proportional sind (die Seiten verhalten sich wie die reciproken Werte der zugehörigen Höhen).

112. In einem Dreieck ABC schneiden sich zwei Höhen Aa und Bb in O; beweise, dafs $Cb \,.\, CA = Ca \,.\, CB$.

113. Beweise, dafs $BO \,.\, Ob = AO \,.\, Oa$.

114. Beweise, dafs $Bb \,.\, Ob = Ab \,.\, bC$.

Betrachtet man AOB als das gegebene Dreieck, so wird C der Durchschnittspunkt der Höhen. Dadurch ergeben sich neue Sätze aus 112, 113 und 114.

115. An die Endpunkte eines Kreisdurchmessers AB sind zwei Tangenten AC und BD gezogen. E ist ein Punkt der Peripherie, in welchem AD und BC sich schneiden. Zeige, dafs der Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen AC und BD ist.

116. Beweise, dafs jede Sehne die mittlere Proportionale ist zwischen einem Durchmesser und der Senkrechten von dem einen Endpunkt der Sehne auf die an ihren anderen Endpunkt gezogene Tangente.

117. In einem einbeschriebenen Dreieck ist AD der an B gezogenen Tangente parallel. Zeige, dafs $AB^2 = BD \cdot BC$.

118. Ein Quadrat ist so in ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet, dafs eine seiner Seiten auf der Hypotenuse liegt. Beweise, dafs einer von den Abschnitten der Hypotenuse die mittlere Proportionale zwischen den beiden anderen ist.

119. In einem gleichschenkligen Dreieck ist jeder Schenkel in drei gleiche Teile geteilt; der oberste Teilpunkt des einen Schenkels ist mit dem untersten Teilpunkt des anderen Schenkels verbunden, und die Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Grundlinie verlängert. Beweise, dafs die Abschnitte dieser Linie gleich grofs sind, und dafs die Verlängerung der Grundlinie gleich dem dritten Teile der ganzen Grundlinie ist.

120. In einem Dreieck ABC sind auf AC zwei Punkte D und E so bestimmt, dafs $AE = AB$, und dafs AE die mittlere Proportionale zwischen AD und AC ist. Zeige, dafs BE den Winkel DBC halbiert.

121. Beweise, dafs die Medianen eines Dreiecks sich gegenseitig in Abschnitte teilen, welche sich wie 1:2 verhalten.

122. Beweise, dafs die Linie, welche in einem Trapez die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten ist.

123. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind nach entgegengesetzten Richtungen verlängert, so dafs jede Verlängerung gleich der gegenüberliegenden Seite ist. Beweise, dafs die Linie, welche die Endpunkte der Verlängerungen mit einander verbindet, eine von den Diagonalen des Trapezes halbiert und die andere in einem Punkte schneidet, welcher ebenso weit von dem einen Endpunkt der Diagonale entfernt ist, wie der Durchschnittspunkt der Diagonalen von dem anderen.

124. Von einem Punkte O ist an eine gegebene Gerade eine Linie OA gezogen, und auf dieser ein Punkt a so bestimmt, dafs das Product $OA \,.\, Oa$ eine gegebene Gröfse hat. Beweise, dafs a einen Kreis beschreibt, welcher durch O geht, wenn A die gegebene Gerade durchläuft.

125. In einem Dreieck BAC ist A ein rechter Winkel, und CD halbiert den Winkel C. Beweise, dafs $AB \,.\, AD = AC(BC - AC)$.

126. Zwei Kreise berühren sich von aufsen; beweise, dafs das Stück ihrer gemeinschaftlichen Tangente zwischen den beiden Berührungspunkten die mittlere Proportionale zwischen den Durchmessern ist.

127. In einem Dreieck ABC ist die Mediane AD gezogen, und durch A eine Linie $AE \parallel BC$. Eine beliebige Linie durch D schneidet AE in E, AB in F und AC in G; beweise, dafs $DF : DG = EF : EG$.

128. Durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Trapezes ist eine Parallele zu den parallelen Seiten gezogen. Beweise, dafs die beiden parallelen Seiten sich wie die Abschnitte verhalten, in welche die Parallele die nicht parallelen Seiten teilt.

129. AD ist ein Durchmesser eines Kreises und

AB, BC und CD sind Tangenten. Beweise, dafs beide Diagonalen des Vierecks $ABCD$ die Senkrechte halbieren, welche man vom Berührungspunkte der Tangente BC auf den Durchmesser fällt.

130. Zwei gegebene Kreise berühren sich in O, und durch O ist eine Linie gezogen, welche die beiden Kreise in A und B schneidet. Zeige, dafs der Radius des Kreises, welcher den einen Kreis in A berührt und durch B geht, constant ist.

131. Ein Kreis berührt einen anderen von innen in A. BC ist eine Sehne des gröfseren Kreises, welche den kleineren in D berührt. Beweise, dafs AD den Winkel BAC halbiert.

132. Von einem Punkte einer Kreisperipherie sind Senkrechte auf zwei Tangenten und auf die Sehne gefällt, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten verbindet; beweise, dafs die letztgefällte Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden ersten ist.

133. In einem Dreieck ABC ist eine Linie gezogen, welche AB in c, AC in b und die Verlängerung von BC in a schneidet. Beweise, dafs

$$Ba \,.\, Ac \,.\, Cb = Ab \,.\, Ca \,.\, Bc.$$

Ziehe $Cm \parallel AB$; beachte, dafs $\triangle\, bmC \sim bcA$, und $\triangle\, maC \sim caB$, und eliminiere Cm aus den beiden dadurch erhaltenen Gleichungen.

134. Von den Eckpunkten eines Dreiecks ABC sind bis an die gegenüberliegenden Seiten die Linien Aa, Bb und Cc gezogen, welche sich in demselben Punkt O schneiden; beweise, dafs

$$Ba \,.\, Ac \,.\, Cb = Ab \,.\, Ca \,.\, Bc.$$

Wende Aufgabe 133 auf das $\triangle\, ABb$ an, welches von Cc geschnitten wird, und auf Bbc, welches von Aa

geschnitten wird, und eliminiere AC aus den beiden erhaltenen Gleichungen.

135. Beweise den Satz in 87 mit Hülfe der Senkrechten, welche von den Endpunkten der geteilten Seite auf die Halbierungslinie des Winkels gefällt sind.

136. In zwei gegebenen Kreisen mit den Mittelpunkten C und c sind zwei beliebige parallele Radien CA und ca gezogen. Beweise, dafs Aa die Centrale in einem festen Punkte (dem äufseren Ähnlichkeitspunkte) schneidet, wenn die beiden Radien gleich gerichtet sind, und in einem anderen festen Punkte (dem inneren Ähnlichkeitspunkte), wenn die Radien entgegengesetzt gerichtet sind. Was für eine Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise läfst sich hieraus ableiten?

137. Die Punkte a und b teilen die Linie AB harmonisch; beweise, dafs A und B auch ab harmonisch teilen.

Wenn A und B feste Punkte sind, und a sich von A nach B bewegt, welche Bewegung vollführt b gleichzeitig? Wenn $AB = k$, $Aa = r_1$, $Ab = r_2$, so ist nachzuweisen, dafs

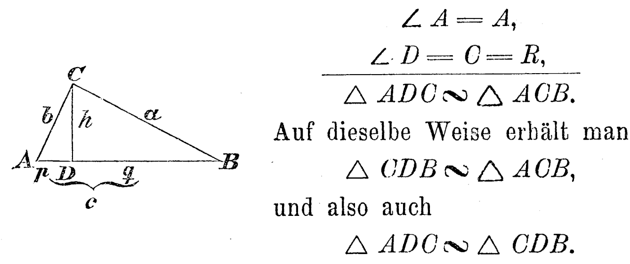
$$\frac{2}{k} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

138. Beweise, dafs OA (Aufgabe 137) die mittlere Proportionale zwischen Oa und Ob ist, wenn O die Mitte von AB ist.

II. Das rechtwinklige Dreieck.

95. Die Höhe auf der Hypotenuse teilt jedes rechtwinklige Dreieck in zwei Dreiecke,

welche beide dem ganzen Dreieck und also auch einander ähnlich sind; man hat nämlich



$$\angle A = A,$$
$$\angle D = C = R,$$
$$\triangle ADC \sim \triangle ACB.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\triangle CDB \sim \triangle ACB,$$

und also auch

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB.$$

Mit Hülfe dieser Dreiecke lassen sich verschiedene Proportionen aufstellen, von denen die wichtigsten folgende sind:

Da $\triangle ADC \sim CDB$, so hat man

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \text{ oder } h^2 = pq,$$

das heifst:

a) Die Höhe ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Da $\triangle ADC \sim ACB$, so ist

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{CB},$$
$$b^2 = pc, \text{ und } ab = ch,$$

das heifst:

b) Jede Kathete ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse, und

c) Das Product aus den beiden Katheten ist gleich dem Producte aus der Höhe und der Hypotenuse.

Der wichtigste Satz über das rechtwinklige Dreieck ist indessen der pythagoreische Lehrsatz (gefunden von Pythagoras im 6ten Jahrhundert v. Chr.):

d. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Zu diesem Resultat gelangt man, wenn man

$$b^2 = p \cdot c$$

und das analoge $\underline{a^2 = q \cdot c}$ addiert,

woraus $a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c = c^2$.

Aus diesem Satze geht hervor, daſs man die eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen kann, wenn man die beiden anderen kennt; man findet nämlich:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}; \; b = \sqrt{c^2 - a^2}; \; c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

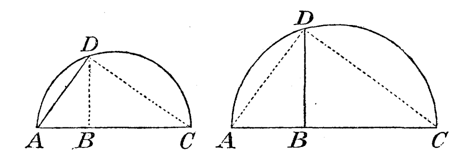
Mit Hülfe der Sätze über das rechtwinklige Dreieck kann man im allgemeinen, wenn zwei von den Stücken a, b, c, p, q und h gegeben sind, die übrigen berechnen; doch führen einige von diesen Aufgaben auf Gleichungen zweiten Grades.

Ist Winkel C stumpf und nennt man die gegenüberliegende Seite c_1, die beiden einschlieſsenden a und b, so ist $c_1 > \sqrt{a^2 + b^2}$; ist $\angle C$ spitz, so ist $c_1 < \sqrt{a^2 + b^2}$. Vergleicht man nämlich dieses Dreieck mit dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten a und b sind, so hat man im ersten Fall $c_1 > c$, im zweiten $c_1 < c$ (46).

96. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere Proportionale zu construieren.

a) Auf der gröſseren Strecke b trägt man a ab (AB), und beschreibt über b als Durchmesser einen Halbkreis; im Endpunkte von a errichtet man eine Senkrechte, und zieht dann die Sehne x (AD); x ist dann die gesuchte Strecke (95, b).

b) Über $a + b$ als Durchmesser wird ein Halbkreis beschrieben, und in dem Punkte, wo a und b zusammenstoſsen, eine Senkrechte x (BD) errichtet; diese ist die gesuchte Strecke (95, a).



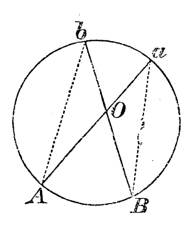
Da $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, so wird $x = \sqrt{ab}$. Eine Strecke, welche durch bekannte Strecken unter dieser Form ausgedrückt werden kann, läfst sich also nach den angegebenen Methoden construieren; ist z. B. $x = a\sqrt{5} = \sqrt{5a \,.\, a}$, so ist x die mittlere Proportionale zwischen a und $5a$. Man könnte auch $x = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$ setzen und also x als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks construieren, in dem die eine Kathete a und die andere $2a$ ist.

$z = \sqrt{ab + cd}$ wird construiert, indem man $ab = x^2$ und $cd = y^2$ setzt; x und y findet man dann durch 96; darauf ergiebt sich z als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten x und y.

III. Potenz eines Punktes mit Beziehung auf einen Kreis.

97. a) Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises, so ist das Product aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Product aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Man ziehe die Hülfslinien Ab und Ba; dann ist



$$\left.\begin{array}{l}\angle A = B \\ \angle b = a\end{array}\right\} \ldots (24).$$

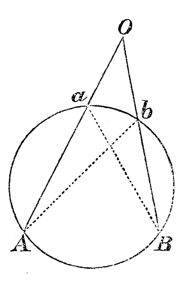
also $\triangle AbO \sim \triangle BaO$,

woraus $\frac{OA}{OB} = \frac{Ob}{Oa}$,

oder $OA \,.\, Oa = OB \,.\, Ob$.

b) Schneiden sich zwei Secanten, so ist das Product aus der einen Secante und ihrem äufseren Abschnitt gleich dem Product aus der anderen Secante und ihrem äufseren Abschnitt.

Der vorhergehende Beweis gilt auch für diesen Fall.



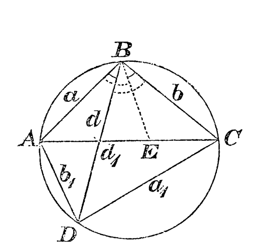
Da der Satz für jede Lage der Secanten gilt, so gilt er auch für den Grenzfall, wo b und B zusammenfallen; in diesem Falle werden sowohl Ob wie OB gleich der Tangente, so dafs der Satz also heifst: Die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äufseren Abschnitt.

Diese drei Sätze lassen sich auch in einen einzigen zusammenfassen:

Wird ein Kreis von meheren geraden Linien geschnitten, welche von demselben Punkte ausgehen, so ist das Product aus den beiden Strecken, welche auf jeder Linie abgeschnitten werden (beide vom festen Punkte bis an einen der Durchschnittspunkte zwischen dem Kreise und der Geraden gerechnet) für alle Linien dasselbe (constant). Dieses Product heifst die Potenz des Punktes mit Beziehung auf den Kreis; zieht man vom festen Punkte eine Linie durch den Kreismittelpunkt, so ergiebt sich, dafs die Potenz eines Punktes, dessen Entfernung vom Kreismittelpunkte a ist (Radius r), gleich $a^2 - r^2$ ist, wenn $a > r$, und gleich $r^2 - a^2$, wenn $r > a$.

IV. Lehrsatz des Ptolemäus.

98. In jedem Sehnenviereck ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten.



Man mache $\angle CBE = \angle DBA$;
dann ist $\triangle CBE \sim \triangle DBA$,
woraus $EC : b_1 = b : d$.
$\triangle EBA \sim \triangle CBD$,
woraus $AE : a_1 = a : d$;
aber aus $b \,.\, b_1 = d \,.\, EC$,
und $a \,.\, a_1 = d \,.\, AE$
erhält man durch Addition

$$aa_1 + bb_1 = dd_1.$$

Ist das Sehnenviereck ein Rechteck, so geht der ptolemäische Lehrsatz über in den pythagoreischen.

Übungsaufgaben.

139. In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Katheten a und b, die Kathetenprojectionen q und p, die Höhe h, und die Hypotenuse c; wie grofs sind die übrigen Stücke, wenn

1) $q = 5{,}4$; $p = 9{,}6$?
2) $q = 3{,}6$; $a = 6{,}0$?
3) $a = 0{,}5$; $b = 1{,}2$?
4) $c = 6{,}0$; $a = 4{,}8$?

140. Construiere die Ausdrücke $\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}$, $\sqrt{\frac{abc^2}{(a+b)(b+c)}}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, $\sqrt{\frac{a^3 + b^3}{3a - 2b}}$, wenn a, b und c gegebene Strecken bedeuten.

141. In einem Dreieck, dessen Seiten

$$a = 7{,}0;\ b = 7{,}7;\ c = 8{,}4,$$

ist eine Transversale, $d = 1{,}68$, parallel der Seite c gezogen; wie grofs sind die Abschnitte, in welche a und b durch dieselbe geteilt werden?

142. In einem Rechteck ist die eine Seite gleich 3 m, und die Diagonale ist 1 m länger als die andere Seite. Wie grofs ist diese?

143. Eine Höhe eines Dreiecks ist gleich 15, und dieselbe teilt die zugehörige Grundlinie in die Abschnitte 6 und 10. In welcher Entfernung von der Grundlinie liegt der Durchschnittspunkt der Höhen?

144. Wie grofs ist die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich a?

145. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse $m^2 + n^2$, und die eine Kathete $2mn$. Man bestimme die andere Kathete.

146. Wie grofs ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite a?

147. In einem Viereck stehen die Diagonalen senkrecht auf einander. Beweise, dafs die Summe der Quadrate von zwei gegenüberliegenden Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen ist.

148. Ein Kreis geht durch den Mittelpunkt C eines anderen Kreises und berührt denselben in A. Eine Senkrechte auf AC schneidet den ersten Kreis in D, den zweiten in E. Beweise, $AE^2 = 2\,AD^2$.

149. Von einem Punkte E auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r ist eine Senkrechte EP auf einen Durchmesser gefällt; D sei die Mitte des Halbkreises, auf welchem E liegt. Beweise, dafs $PD^2 + PE^2 = 2r^2$.

150. In einem Kreise mit dem Radius r ist ein Centriwinkel von 45° gegeben. In einem Punkte C des einen Schenkels ist eine Senkrechte errichtet, welche den anderen Schenkel in D und den Kreis in E schneidet. Beweise, dafs $CD^2 + CE^2 = r^2$.

151. Von einem Punkte ist an einen Kreis eine Secante gezogen, welche durch die Peripherie in zwei gleiche Stücke a geteilt wird. Wie grofs ist die von demselben Punkte gezogene Tangente?

152. In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1,41 un 1,88 wird eine Senkrechte auf der Mitte der Hypotenuse errichtet. Wie grofs sind die Abschnitte, in welche dieselbe die eine Kathete teilt?

153. In einem Halbkreise sind über jeder Hälfte r des Durchmessers wieder Halbkreise beschrieben. Wie grofs ist der Radius des Kreises, welcher die drei Halbkreise berührt?

154. In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c ist die zu c gehörige Höhe gezogen. Beweise, dafs $a^2 - b^2 = 2cl$, wenn l die Entfernung des Fufspunktes der Höhe von der Mitte von c bedeutet, und wenn $a > b$. Beweise, dafs $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$. ($m$ ist die zu c gehörige Mediane).

155. Auf einem Kreisdurchmesser sind zwei Punkte A und B in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte gegeben; P sei irgend ein Punkt der Peripherie. Beweise, dafs $AP^2 + BP^2$ constant ist.

156. Durch A (Aufgabe 155) ist eine beliebige Sehne gezogen, und ihre Endpunkte sind mit B verbunden. Beweise, dafs die Summe der Quadrate der drei Seiten des so entstandenen Dreiecks constant ist.

157. In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c ist die Halbierungslinie des $\angle A$ bis an die Seite a gezogen. Wie grofs ist die Länge x dieser Linie?

Man verlängere x um ein Stück y bis sie die Peripherie des umbeschriebenen Kreises in M schneidet und ziehe MC; xy ist bekannt, und mit Hülfe von zwei ähnlichen Dreiecken findet man $x^2 + xy$ (87 und 97).

158. BC ist ein Durchmesser, und A und F sind zwei Punkte auf der Peripherie eines Kreises. $FD \perp BC$ schneidet BA in E und CA in G. Beweise, dafs DF die mittlere Proportionale zwischen DE und DG ist.

159. Zeige, dafs ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des einen von zwei concentrischen Kreisen dieselbe Potenz mit Beziehung auf den anderen Kreis hat, wie irgend ein Punkt auf der Peripherie des zweiten Kreises mit Beziehung auf den ersten.

160. Beweise, dafs die Linie, welche den Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten eines Sehnenvierecks halbiert, die beiden anderen Seiten in Stücke teilt, welche eine Proportion bilden.

161. In einem Dreieck, dessen Seiten 13, 20 und 21 sind, ist die Höhe auf die letzte Seite gefällt; wie grofs sind die Abschnitte der Grundlinie, und wie grofs ist die Höhe?

162. Gegeben sind zwei Seiten eines Dreiecks und einer von den Abschnitten, in welche die Höhe die dritte Seite teilt; wie grofs ist die dritte Seite?

163. a und b sind zwei parallele Sehnen, deren Entfernung gleich d ist; wie grofs ist der Radius des Kreises?

164. Eine Tangente an O schneidet zwei parallele Tangenten in A und B. Zeige, dafs $OA \,.\, OB$ constant ist.

165. Ein rechtwinkliges Dreieck ist durch die Höhe in zwei Dreiecke geteilt; man soll eine Gleichung zwischen den Radien der einbeschriebenen Kreise dieser drei Dreiecke finden.

166. Einen wie langen Schatten wirft ein Gegenstand von 5 cm Höhe, wenn ein Licht, dessen Höhe 20 cm beträgt, sich in einer Entfernung von 15 cm befindet?

167. Die Centrale zweier Kreise mit den Radien R und r sei c. In welcher Entfernung von den Kreismittelpunkten wird die Centrale von einer Linie geschnitten, welche beide Kreise berührt?

168. In ein Viereck mit den Diagonalen d und D ist ein Rhombus beschrieben, dessen Seiten den Diagonalen parallel sind; wie grofs ist die Seite des Rhombus?

169. A und B sind die Endpunkte einer Strecke, und C und E sind zwei Punkte einer Linie, welche senkrecht auf AB steht. Beweise, dafs $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

170. Ein Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist 30°, die gegenüberliegende Kathete a. Man berechne die beiden anderen Seiten, die Höhe und die Abschnitte der Hypotenuse.

171. Beweise, dafs die Summe der Quadrate der vier Abschnitte von zwei auf einander senkrechten Sehnen gleich dem Quadrat des Durchmessers ist.

172. a, b und c sind drei Sehnen, deren Bogen zusammen 180° ausmachen. Durch welche Gleichung wird der Durchmesser des Kreises bestimmt?

173. Die vier Seiten eines Trapezes sind gegeben; man bestimme die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

174. Ein Kreis hat mit Beziehung auf zwei Punkte A und B die Potenzen p_1 und p_2, während P die Potenz desselben mit Beziehung auf einen Punkt ist, welcher AB in die Abschnitte α und β teilt. Zeige, dafs

$$(P + \alpha\beta)(\alpha + \beta) = \beta\, p_1^{\,2} + \alpha\, p_2^{\,2}.$$

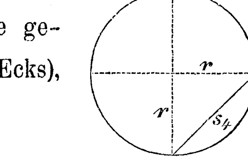
175. M ist die Mitte einer Dreiecksseite, die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels schneidet dieselbe in K, die Höhe trifft sie in H, und der einbeschriebene Kreis berührt sie in N. Zeige, dafs

$$MN \,.\, HN = MH \,.\, NK.$$

176. Über einer Strecke AD als Durchmesser ist ein Halbkreis beschrieben, und von einem Punkte B desselben ist $BF \perp AD$ gezogen. Ziehe von D aus die Sehne $DC = DB - AB$, ziehe $CE \perp AD$, und zeige, dafs $AE = 2BF$.

V. Teilung der Kreisperipherie.

99. Ein Kreis wird durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche Teile geteilt.



Bezeichnet man den Radius mit r, und die zu $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie gehörige Sehne mit s_n (Seite des n-Ecks), so ist

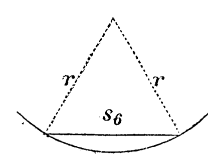
$$s_4^{\,2} = r^2 + r^2 = 2r^2,$$

also

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

Durch fortgesetztes Halbieren der Bogen läfst sich der Kreis ferner in 8, 16, 32 ... 2^n gleiche Teile teilen.

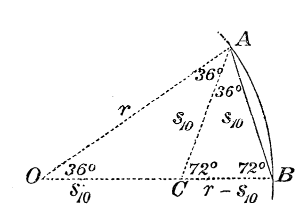
100. s_6 oder die zu einem Bogen von 60° gehörige Sehne ist gleich dem Radius.



Ist der Bogen 60°, so beträgt der zugehörige Centriwinkel auch 60°, und, da das Dreieck gleichschenklig ist, jeder der beiden anderen Winkel auch 60°; das Dreieck ist also gleichseitig und die Sehne folglich gleich dem Radius.

Die Peripherie wird also in 6 gleiche Teile geteilt, wenn man den Radius 6 mal als Sehne in den Kreis einträgt, und in 3 gleiche Teile, wenn man jeden anderen Teilpunkt überschlägt; durch fortgesetztes Halbieren der Bogen wird sie in 12, 24, 48 ... 3 . 2^n gleiche Teile geteilt.

101. s_{10} oder die zu 36° gehörige Sehne ist gleich $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.



Die gesuchte Sehne ist Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Schenkel Radien sind, in dem der Winkel an der Spitze 36° beträgt, und jeder Winkel an der Grundlinie also 72°; halbiert man einen von diesen durch AC, so wird $\triangle\ CAB$ gleichschenklig, da $\angle B = \angle C = 72°$; also ist $AC = s_{10}$; ferner ist $\triangle\ ACO$ gleichschenklig, also $OC = s_{10}$ und $CB = r - s_{10}$. Nun zeigen die Winkel, das $\triangle\ OAB \sim \triangle\ ACB$, also

$$\frac{r}{s_{10}} = \frac{s_{10}}{r - s_{10}}, \text{ oder } s_{10}^2 + rs_{10} - r^2 = 0.$$

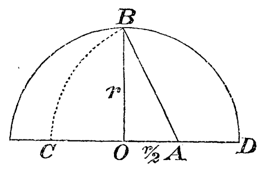
Aus dieser Gleichung folgt:

$$s_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}.$$

Da aber in diesem Falle nur das obere Vorzeichen Sinn hat, so ist

$$s_{10} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\,(\sqrt{5} - 1).$$

Construction von s_{10} durch stetige Teilung des Radius. Der erste von den beiden Ausdrücken für s_{10} zeigt, wie sich die Zehnecksseite construieren läfst. $\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}$ ist nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{r}{2}$ und r sind.



Nebenstehende Figur zeigt die Construction; man halbiert den Radius OD, zieht $OB \perp OD$, und verbindet A mit B; macht man dann $AC = AB$, so ist OC die Zehnecksseite, denn man hat $OC = AC - AO = AB - AO$

$$= \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{r}{2}.$$

Eine Strecke heifst stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn sie so in zwei Abschnitte geteilt ist, dafs der gröfsere die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der ganzen Strecke ist; die Proportion, welche sich bei der Bestimmung von s_{10} ergab, zeigt also, dafs die Zehnecksseite der gröfsere Abschnitt des stetig geteilten Radius ist.

Ist die Kreisperipherie in 10 gleiche Teile geteilt, so kann man dieselbe durch Verdoppeln oder fortgesetztes Halbieren der Bogen in 5, 20, 40, 80 ... $5 \cdot 2^n$ gleiche Teile teilen.

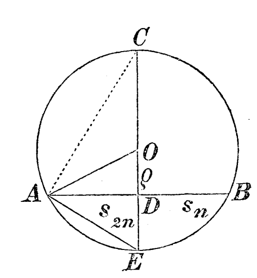
102. Subtrahiert man einen Bogen von 36° von einem Bogen von 60°, so erhält man einen Bogen von 24°, und auf diese Weise kann man also einen Kreis in

15, und durch fortgesetztes Halbieren der Bogen in 30, 60 .... 15 . 2^n gleiche Teile teilen. Der Ausdruck für s_{15} findet sich unten (Aufgabe 183).

103. Wenn eine Sehne berechnet ist, so findet man ihre Entfernung ρ vom Mittelpunkte durch 95, d; ist die Sehne s, der Radius r, so erhält man

$$\rho = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} s^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s}{r}\right)^2}$$

104. Ist der Radius gegeben, und hat man die zu einem gewissen Bogen gehörige Sehne berechnet, so kann man hieraus wieder die Sehne des halben und die Sehne des doppelten Bogens berechnen.



Es sei $AB = s_n$; $AE = s_{2n}$, $OD \perp AB$, folglich $\widehat{AB} = 2\,\widehat{AE}$; man erhält dann aus dem rechtwinkligen Dreieck AOD

$$OD = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}$$

und daraus $DE = r - OD = r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}$.

Da nun $\angle\, CAE = 90°$, so ist AE oder s_{2n} die mittlere Proportionale zwischen DE und dem Durchmesser CE, also

$$s_{2n} = \sqrt{2r\,.\,DE} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

oder
$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

Beispiel. Aus $s_6 = r$ findet man hiernach

$$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}};\quad s_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

aus $s_4 = r\sqrt{2}$ ergiebt sich $s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Um s_n aus s_{2n} zu berechnen, beachte man, dafs

$$2r \,.\, AD = s_{2n} \,.\, AC \text{ (95, c)},$$

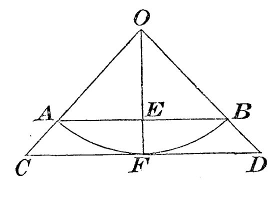
oder
$$r \,.\, s_n = s_{2n} \,.\, \sqrt{4r^2 - s_{2n}{}^2},$$

woraus
$$s_n = s_{2n} \sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2}.$$

Beispiel. Aus $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ergiebt sich

$$s_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

105. Ist die Seite und der kleine Radius eines einbeschriebenen regulären Polygons berechnet, so läfst sich hieraus die Seite und der grofse Radius des umbeschriebenen regulären Polygons von gleicher Seitenzahl berechnen.



AB sei die Seite des einbeschriebenen Polygons; man ziehe vom Kreismittelpunkt die $OF \perp AB$, und ziehe darauf die Tangente *CD*; dann ist *CD* die Seite und *OC* der grofse Radius des umbeschriebenen Polygons; nun ist $AB \parallel CD$, da beide senkrecht auf *OF* stehen, und mithin sind die Dreiecke *AOB* und *COD* ähnlich. Daraus folgt, dafs

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CO}{AO} = \frac{FO}{EO}.$$

Setzt man nun

$$CD = S_n, \; AB = s_n, \; CO = R, \; OE = \rho,$$

so ist
$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}$$

oder
$$S_n = \frac{rs_n}{\rho}; \; R = \frac{r^2}{\rho}.$$



Übungsaufgaben.

177. Wie grofs sind s_3 und ρ_3, S_6 und R_6, ρ_8 und S_8?

178. Wie grofs ist das Product $s_{12} \cdot \rho_{12}$?

179. Wie grofs ist S_3, und wie grofs ist der kleine Radius eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a?

180. Beweise, dafs die Linie BC in der Figur zu 101 die Seite des regelmäfsigen Fünfecks ist.

181. Suche die mittlere Proportionale zwischen der Sehne von 30° und der von 150°.

182. Bestimme s_{64}, s_{96}, ρ_{64} und ρ_{96}.

183. a, b und c sind die Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks; suche c, wenn a, b und r gegeben sind.

Man ziehe einen Durchmesser vom Durchschnittspunkt von a und b, und verbinde den anderen Endpunkt des Durchmessers mit den Endpunkten von a und b. Diese Verbindungslinien sind dann beziehlich gleich $\sqrt{4r^2 - a^2}$ und $\sqrt{4r^2 - b^2}$, und man hat dann (98)

$$2rc = a\sqrt{4r^2 - b^2} \pm b\sqrt{4r^2 - a^2},$$

wo das obere Vorzeichen zu nehmen ist, wenn c die Sehne zu der Summe, das untere, wenn c die Sehne zu der Differenz der beiden Bogen ist, deren Sehnen a und b sind ($a > b$).

Für die Berechnung von s_{15} ist $a = r$, $b = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, also

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1)\right).$$

VI. Länge der Kreisperipherie.

106. Eine krumme Linie läfst sich nicht durch eine gerade Linie messen, denn das Mafs und die zu

messende Linie müssen gleichartig sein; es mufs deshalb genauer auseinander gesetzt werden, was unter der Länge der Kreisperipherie zu verstehen ist.

Man sieht leicht, dafs ein einbeschriebenes regelmäfsiges $2n$-Eck einen gröfseren Umfang hat als ein einbeschriebenes n-Eck, während das Umgekehrte für die umbeschriebene Figur gilt. Fährt man also fort die Seitenzahl einer einbeschriebenen und einer umbeschriebenen regelmäfsigen Figur zu verdoppeln, so wird der Umfang im ersten Falle beständig wachsen, im zweiten beständig abnehmen; da nun der letztere immer gröfser ist als der erstere, so müssen dieselben sich einander immer mehr nähern, und man kann beweisen, dafs der Unterschied zwischen beiden kleiner als irgendwelche gegebene Gröfse gemacht werden kann; der Umfang des einbeschriebenen n-Ecks mit der Seite s ist nämlich ns, und der des umbeschriebenen nS.

Der Unterschied ist also, da $s = \frac{\rho S}{r}$ (105),

$$nS - \frac{n\rho S}{r} = nS\,\frac{r-\rho}{r} = nS\frac{r^2-\rho^2}{r(r+\rho)};$$

da aber $r^2 - \rho^2 = \frac{s^2}{4}$, so ist der Unterschied

$$d = nS\frac{s^2}{4r(r+\rho)};$$

hierin ist aber der erste Factor nS der Umfang der umbeschriebenen Figur, und dieser ist schon kleiner als der Umfang der Figur, welche man hatte, ehe die Verdopplung der Seitenzahl begann, während der zweite Factor durch Verdopplung der Seitenzahl so klein gemacht werden kann, wie man will.

Die Länge der Umfänge der ein- und umbeschriebenen Figur nähern sich somit einander mehr und mehr, so

dafs sie eine gemeinschaftliche Grenze haben, einen Wert, dem sie sich beide nähern. Diese Grenze meint man, wenn man von der Länge der Kreisperipherie spricht.

Die Grenze bleibt dieselbe, einerlei von welchem regulären Polygon man ausgeht.

Die Umfänge der um- und einbeschriebenen Figur von grofser Seitenzahl seien P und p, und G sei die Grenze. Durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl kann man nun $P - G$ und $G - p$ kleiner als irgend welche noch so kleine Gröfse machen. P_1, p_1 und G_1 seien Umfänge und Grenze für ein anderes reguläres Polygon. Da p_1 innerhalb P und p innerhalb P_1 liegt, so kann man (Aufgabe 56)

$$P - p_1 = \alpha, \quad P_1 - p = \beta$$

setzen, wo α und β gewisse positive Gröfsen bedeuten; deshalb auch

$$P_1 - p_1 + P - p = \alpha + \beta.$$

Da aber hier $P_1 - p_1$ und $P - p$ durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl kleiner als irgend welche noch so kleine gegebene Gröfse gemacht werden können, so mufs dasselbe mit den positiven Gröfsen α und β der Fall sein. P_1 mufs deshalb dieselbe Grenze haben wie p, oder G_1 mufs gleich G sein.

107. Die Längen von zwei Kreisperipherien verhalten sich wie die Radien.

Die Umfänge von zwei regelmäfsigen Figuren mit gleich vielen Seiten verhalten sich nämlich wie die grofsen Radien, und dieser Satz behält seine Gültigkeit, wie oft man auch die Seitenzahl des Polygons verdoppelt; folglich mufs er auch für den Kreis gelten.

Bezeichnet man die Peripherien mit P und p, die

Radien mit R und r und die Durchmesser mit D und d, so hat man also

$$\frac{P}{p} = \frac{D}{d} = \frac{R}{r},$$

oder

$$\frac{P}{D} = \frac{p}{d},$$

woraus hervorgeht, dafs das Verhältnis zwischen Peripherie und Durchmesser für alle Kreise dasselbe (constant) ist; dieses Verhältnis, welches eine unbenannte Zahl ist, wird durch den Buchstaben π bezeichnet, so dafs

$$P = D\pi = 2R\pi.$$

Es kommt also darauf an, ein für alle Mal diese Zahl π zu berechnen; sobald dieselbe bekannt ist kann man, wenn von den drei Gröfsen P, D und R eine gegeben ist, jedesmal die beiden anderen berechnen.

Da das Verhältnis für alle Kreise dasselbe ist, so nimmt man den Radius gleich 1, also den Durchmesser gleich 2, und berechnet den Umfang eines einbeschriebenen Polygons von grofser Seitenzahl; ist die Seitenzahl n, so hat man

$$n \cdot s_n < p < n \cdot S_n,$$

also

$$\frac{n \cdot s_n}{2} < \pi < \frac{n \cdot S_n}{2}.$$

Nun ist $s_6 = 1$, und hieraus ergab sich (104) $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638090$; hieraus findet man nach und nach auf dieselbe Weise s_{24}, s_{48} .... bis z. B. s_{768}; multipliciert man den gefundenen Wert mit 768, so erhält man den Umfang des 768-Ecks $(n . s_n)$ gleich 6,283160; nach Division durch 2 hat man also

$$3{,}141580 < \pi.$$

Aus s_{768} berechnet man dann ρ_{768} (103) und daraus wieder S_{768}; multipliciert man diesen Wert mit 768, so

erhält man den Umfang des umbeschriebenen 768-Ecks ($n \,.\, S_n$); für diesen findet man die Zahl 6,283212, und erhält nach Division durch 2

$$\pi < 3{,}141606.$$

Da π zwischen den beiden auf solche Weise gefundenen Werten liegt, so hat man mit 4 richtigen Decimalen

$$\pi = 3{,}1416.$$

Durch leichtere Methoden, deren Auseinandersetzung aber hier nicht möglich ist, hat man π bis auf mehrere hundert Decimalen berechnet; die ersten sind

$$\pi = 3{,}1415926535 \ldots.$$

Diese Zahl ist irrational, wird aber annäherungsweise durch die Brüche $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ ausgedrückt; der erste von diesen Näherungswerten ist bereits von Archimedes gefunden worden.

108. Da ein Bogen von 1° gleich $\frac{1}{360}$ der Peripherie ist, so wird seine Länge gleich $\frac{r\pi}{180}$, und folglich die Länge b eines Bogens von $g°$

$$b = \frac{gr\pi}{180}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man, wenn von den drei Gröfsen b, r und g zwei gegeben sind, die dritte berechnen. Ist g in Minuten oder Secunden ausgedrückt, so hat man den Divisor beziehungsweise mit 60 oder 60^2 zu multiplicieren.

Übungsaufgaben.

184. Wie grofs ist der Umfang eines Kreises, wenn der Radius 2,4 m beträgt, und wie grofs ist der Radius, wenn der Umfang gleich 3,6 m?

185. Ein Kreis berührt einen anderen von innen in A und geht durch seinen Mittelpunkt. Durch diesen Mittelpunkt ist eine Linie gezogen, welche die beiden Kreise in B und C schneidet; zeige, dafs $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

186. Zwei Kreise mit den Radien R und r berühren einen Kreis mit dem Radius $R + r$ von innen beziehlich in A und B, während C einer ihrer Durchschnittspunkte ist. Beweise, dafs $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$.

187. Wie lang ist ein Bogen von 12° 13′ 20″, wenn der Radius gleich 1,8 m?

188. Wie viel Grad enthält ein Bogen von 3 cm Länge, wenn der Radius gleich 2 cm ist?

189. Eine Reihe von Halbkreisen ist so gestellt, dafs die Durchmesser Verlängerungen von einander sind. Beweise, dafs die Summe der Längen aller Halbkreise gleich dem Halbkreise ist, dessen Durchmesser gleich der Summe der gegebenen Durchmesser.

190. Bestimme die Anzahl von Graden, welche ein Bogen von der Länge des Radius enthält.

191. Wie grofs ist der Radius der Erde, wenn ein Breitengrad 15 geogr. Meilen beträgt?

192. O ist der Mittelpunkt eines Kreises und A ein Punkt, dessen Entfernung von O gleich dem n-fachen Radius ist. Über OA als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Zwei von A ausgehende Linien schneiden aus dem ersten Kreise die Bogen b_1 und b_2 heraus; wie grofs ist der Bogen des zweiten Kreises, den die beiden Linien zwischen sich fassen?

193. Eine Wellenlinie ist dadurch gebildet, dafs eine Strecke a in n gleiche Teile geteilt, und über jedem Teile als Sehne ein Bogen von 60° abwechselnd nach

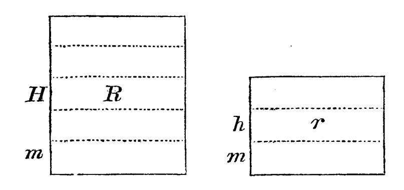
oben und nach unten beschrieben worden ist. Wie lang ist die Wellenlinie? Was wird aus dieser Länge und was aus der Wellenlinie, wenn n bis ins Unendliche wächst, während a unverändert bleibt?

IV. Kapitel.

Flächeninhalt.

109. Der Flächeninhalt einer Figur wird durch ein Quadrat gemessen, dessen Seite die Längeneinheit ist; dieses Quadrat heifst die Flächeneinheit. Benutzt man als Längeneinheit m, cm u. s. w., so heifst die Flächeneinheit Quadratmeter, Quadratcentimeter u. s. w. Die Bezeichnung ist ebenso wie beim Längenmafs, nur wird ein q hinzugefügt, also qm, qcm u. s. w.

110. Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.



Ist die Strecke m ein gemeinschaftliches Mafs für beide Höhen, und also beispielsweise $H = pm$, $h = qm$, dann ist

$$\frac{H}{h} = \frac{p}{q}.$$

Durch die Teilungspunkte gezogene Parallelen teilen

die Rechtecke beziehungsweise in p und q congruente Rechtecke, mithin

$$\frac{R}{r}=\frac{p}{q},$$

und folglich

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}.$$

Sind die Höhen incommensurabel, so gilt der Satz gleichfalls und wird nach Analogie von 83, β bewiesen.

111. Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Der Satz ist derselbe wie der vorhergehende, da man welche Seite man will zur Grundlinie nehmen kann.

112. Das Verhältnis zwischen zwei beliebigen Rechtecken ist gleich dem Producte aus dem Verhältnis der Höhen und dem Verhältnis der Grundlinien.

Die Rechtecke seien R, mit der Höhe H und der Grundlinie G, und r mit der Höhe h und der Grundlinie g; dann denkt man sich ein drittes Rechteck P, mit der Höhe H und der Grundlinie g.

Dann ist $\frac{R}{P}=\frac{G}{g}$ und $\frac{P}{r}=\frac{H}{h}$,

woraus durch Multiplication:

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}\cdot\frac{G}{g}.$$

Bedeutet r die Flächeneinheit, und sind also h und g beide gleich der Längeneinheit, so würde das heiſsen:

Man erhält die Anzahl Flächeneinheiten eines Rechtecks, wenn man die Maſszahl der Höhe mit der Maſszahl der Grundlinie multipliciert; das schreibt man

$$R=H.G,$$

wo dann E, H und G unbenannte Zahlen bedeuten, und man die Benennung ergänzen mufs; um letzteres zu vermeiden ist man übereingekommen zu sagen, dafs Meter mit Meter multipliciert Quadratmeter geben, und dadurch ist man in der Lage, auch mit benannten Zahlen rechnen zu können; man sagt deshalb:

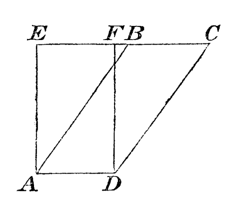
Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Producte aus Höhe und Grundlinie.

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist also gleich dem Quadrat einer Seite; man hat also 1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 1000000 qmm. 100 qm = 1 Ar (a); 10000 qm = 1 Hektar (ha).

113. Jedes Parallelogramm ist gleich einem Rechteck von derselben Höhe und Grundlinie.

Man hat nämlich

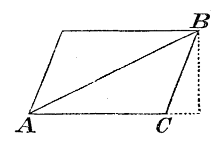
$$\triangle EAB \cong \triangle FDC.$$



Subtrahiert man nun zur Zeit eins von diesen Dreiecken von der ganzen Figur, so bleiben beziehungsweise das Parallelogramm AC und das Rechteck AF übrig; dieselben sind also gleich grofs.

Hieraus folgt, dafs der Flächeninhalt eines Parallelogramms gleich dem Producte aus Höhe und Grundlinie ist.

114. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Höhe und Grundlinie.

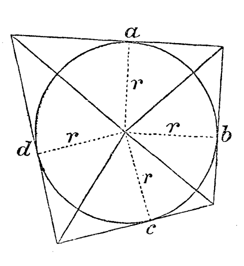


Denn das Dreieck ABC ist gleich der Hälfte des Parallelogramms AB, welches mit ihm in Grundlinie und Höhe übereinstimmt.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Product der beiden Katheten.

In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a ist die Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, und folglich der Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

115. Der Flächeninhalt einer Figur, in welche sich ein Kreis beschreiben läfst, ist gleich dem halben Product aus dem Radius des Kreises und dem Umfange der Figur.



Man zieht vom Kreismittelpunkte Linien an die Ecken der Figur; dadurch teilt man die Figur in Dreiecke, welche alle zur Höhe den Radius r des Kreises haben, und deren Grundlinien die Seiten a, b, c . . . . der Figur sind; bezeichnet man den Flächeninhalt der Figur mit F, so ist $F = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc + \ldots = \frac{1}{2}r(a + b + c \ldots) = \frac{1}{2}ru$, wo u den Umfang bedeutet.

Der Radius des einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks ist also gleich dem Flächeninhalt, dividiert durch den halben Umfang.

116. Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r ist gleich $r^2\pi$.

Nach dem vorhergehenden Satze ist der Flächeninhalt F eines umbeschriebenen Polygons gleich $\frac{1}{2}ru$. Nun setzt sich aber F zusammen aus der Kreisfläche K und einem Überschufs α, und u ist gleich der Kreisperipherie p nebst einem Überschufs β, also

$$K + \alpha = \frac{1}{2}r(p + \beta);$$

da man aber durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl α und β so klein machen kann, wie man will, so folgt

$$K = \tfrac{1}{2}rp,$$

und endlich, da

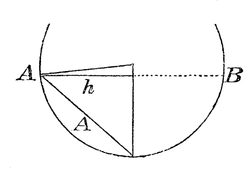
$$p = 2r\pi,$$

$$K = r^2\pi.$$

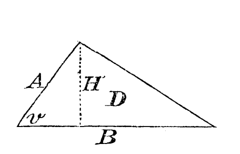
117. Der Flächeninhalt eines Sectors von $g°$ ist gleich $\frac{gr^2\pi}{360}$.

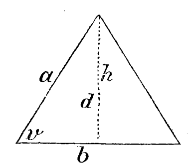
Denn ein Sector von 1° ist $\frac{1}{360}$ des Kreises und folglich gleich $\frac{r^2\pi}{360}$; ein Sector von $g°$ mufs deshalb $\frac{gr^2\pi}{360}$ sein.

118. Der Flächeninhalt eines Abschnitts oder Segments A ist gleich der Differenz zwischen dem Inhalt des entsprechenden Sectors und dem Inhalt des Dreiecks; bei der Berechnung des letzteren nimmt man häufig einen der Radien zur Grundlinie; die Höhe h ist dann die Hälfte von der zu dem doppelten Bogen des Abschnitts gehörenden Sehne AB, und diese ist oft bekannt.



119. Das Verhältnis zwischen zwei Dreiecken, welche in einem Winkel übereinstimmen, ist gleich dem Producte der Verhältnisse der den Winkel einschliefsenden Seiten.





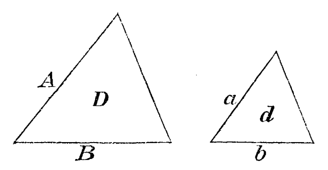
Bezeichnet man die Dreiecke durch D und d, die Höhen durch H und h, so hat man (114)

$$\frac{D}{d} = \frac{H}{h} \cdot \frac{B}{b};$$

aber H und h sind homologe Seiten in ähnlichen Dreiecken, so dafs $\frac{H}{h} = \frac{A}{a}$, und also

$$\frac{D}{d} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b}.$$

120. Das Verhältnis zwischen zwei ähnlichen Dreiecken ist gleich dem Quadrate des Verhältnisses zwischen zwei homologen Seiten.



Man hat (119)

$$\frac{D}{d} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b};$$

aber $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, mithin $\frac{D}{d} = \left(\frac{A}{a}\right)^2$.

121. Das Verhältnis zwischen den Flächeninhalten zweier beliebiger ähnlicher Figuren ist gleich dem Quadrate des Verhältnisses zwischen zwei homologen Seiten, oder gleich dem Quadrate des linearen Verhältnisses.

Zwei ähnliche Figuren lassen sich durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen (93); bezeichnet man diese beziehungsweise durch D_1, D_2, D_3, ... d_1, d_2, d_3, ..., und nennt man das Verhältnis zwischen zwei

beliebigen homologen Seiten oder das lineare Verhältnis f, so ist

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2} = \frac{D_3}{d_3} = \ldots . = f^2 \ldots (120),$$

woraus zufolge eines bekannten Satzes aus der Proportionslehre

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3 + \ldots}{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots} = f^2,$$

wie der Satz verlangt.

Da der Satz nicht abhängig ist von der Seitenzahl, so gilt er auch, wenn diese unendlich ist, also auch für von krummen Linien begrenzte Figuren.

122. Construiert man ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, so dafs diese homologe Linien der Figuren werden, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

Bezeichnet man die Seiten mit a, b, c, die zugehörigen Figuren mit A, B, C, so hat man nach 121:

$$\frac{C}{c^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2},$$

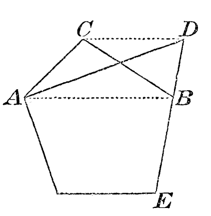
aber da $c^2 = a^2 + b^2$, so ist auch $C = A + B$.

Mit Hülfe dieses Satzes und des Satzes in 94 löst man leicht die Aufgabe, eine Figur zu zeichnen, welche gleich der Summe oder der Differenz zweier gegebener ähnlicher Figuren ist, und welche diesen ähnlich ist.

Im besonderen merke man die Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe oder der Differenz zweier gegebener Quadrate ist.

123. Ein gegebenes Polygon in ein Quadrat zu verwandeln.

Durch eine Diagonale AB schneidet man ein Dreieck ACB vom Polygon ab; zieht man nun $CD \parallel AB$, so wird jedes Dreieck, dessen Spitze auf dieser Linie liegt und dessen Grundlinie AB ist, denselben Flächeninhalt haben wie ACB und also an Stelle desselben genommen werden können; nimmt man nun die Spitze im Punkte D, welchen man durch Verlängerung von BE findet, so hat das neu entstandene Polygon eine Seite weniger als das gegebene.



Auf diese Weise fährt man fort, bis das Polygon in ein Dreieck verwandelt ist; nennt man die Höhe desselben h und die Grundlinie g, ferner die Seite des gesuchten Quadrats x, so mufs

$$x^2 = \frac{1}{2}hg$$

sein, woraus hervorgeht, dafs x die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{2}h$ und g oder zwischen $\frac{1}{2}g$ und h ist; diese läfst sich aber nach einer der in 96 gegebenen Methoden construieren.

124. Dreiecke lassen sich in andere Dreiecke verwandeln, welche gewissen gegebenen Bedingungen genügen; soll dabei eine der gegebenen Seiten unverändert bleiben, so mufs die zu dieser gehörige Höhe auch unverändert bleiben, und die Spitze mufs also auf einer bekannten Linie liegen, welche der Grundlinie parallel ist; es mufs dann noch eine Bedingung gegeben sein, wodurch ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze gefunden wird. Soll einer von den Winkeln unverändert bleiben, so mufs das

Product der denselben einschliefsenden Seiten auch unverändert bleiben (119); ist eine von diesen Seiten gegeben, so bestimmt man die fehlende leicht als vierte Proportionale zu der gegebenen und den beiden Seiten, welche in dem gegebenen Dreieck den Winkel einschliefsen.

125. Eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich und n mal so grofs ist.

Heifst eine Seite der gegebenen Figur a, die ihr homologe der gesuchten Figur x, so hat man

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{n}{1} \ldots . \text{ (121)},$$

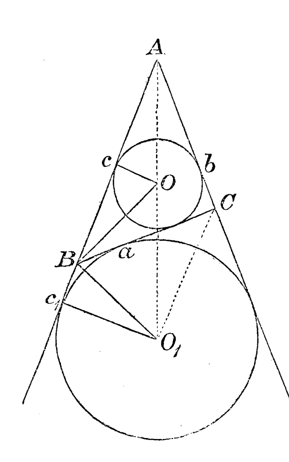
oder

$$x^2 = n \,.\, a^2.$$

Man construiert dann x als mittlere Proportionale zwischen a und na, und wendet darauf 94 an.

126. Der Flächeninhalt des Dreiecks und die Radien der Berührungskreise.

F sei der Flächeninhalt des Dreiecks, A, B, C seien die Winkel desselben, und a, b, c die diesen gegenüberliegenden Seiten; ρ sei der Radius des einbeschriebenen Kreises, und ρ_a der Radius des äufseren Berührungskreises, welcher die Seite a und die Verlängerungen von b und c berührt; dann hat man



$$F = \triangle\, O_1BA + \triangle\, O_1CA - \triangle\, O_1BC,$$

oder $F = \frac{1}{2}\rho_a c + \frac{1}{2}\rho_a b - \frac{1}{2}\rho_a c$
$= \rho_a(s - a) \ldots (64).$

Ferner hat man (115)

$$F = \rho s = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c).$$

Aus den beiden ersten von diesen Gleichungen erhält man

$$F^2 = \rho\rho_a s(s-a),$$

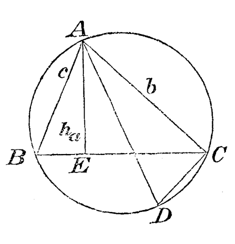
aber da $\triangle BOc \sim \triangle O_1Bc_1$, so erhält man, weil $Bc = s - b$ (64), $Bc_1 = Ac_1 - c = s - c$ (64),

$$\rho\rho_a = (s-b)(s-c),$$

mithin $$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

127. Der Durchmesser $2r$ des umbeschriebenen Kreises ist gleich dem Producte aus zwei Seiten, dividiert durch die Höhe auf der dritten Seite.

Man ziehe den Durchmesser AD und verbinde D mit C; da $\triangle BAE \sim \triangle DAC$, so ist $c : 2r = h_a : b$ oder $r = \frac{bc}{2h_a}$. Erweitert man den Quotienten mit a, so erhält diese Gleichung die Form



$$r = \frac{abc}{4F}, \text{ oder } abc = 4rF.$$

Übungsaufgaben.

194. Beweise, dafs der Flächeninhalt eines Rhombus gleich dem halben Producte der Diagonalen ist.

195. Wie grofs ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich a?

196. Beweise, dafs der Flächeninhalt eines Trapezes gleich dem Product aus der Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten ist.

197. Von einem Punkte innerhalb eines regulären

Polygons sind Senkrechte auf sämtliche Seiten gefällt; beweise, daſs die Summe dieser Senkrechten constant ist.

198. Zwei Seiten eines Dreiecks, a und b, schlieſsen einen Winkel von 30° ein; wie groſs ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

199. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 1,8 qm; wie groſs ist der Radius des umbeschriebenen Kreises?

200. Beweise, daſs ein Dreieck in drei inhaltsgleiche Stücke durch die Linien geteilt wird, welche den Durchschnittspunkt der Medianen (den Schwerpunkt) mit den Eckpunkten verbinden.

201. Durch eine Parallele zu einer Seite soll von einem Dreieck ein anderes Dreieck abgeschnitten werden, welches gleich $\frac{1}{3}$ des gegebenen ist. (120 und 96.)

202. Ein Dreieck soll in zwei gleiche Teile durch eine Linie geteilt werden, welche von einem auf der einen Seite gegebenen Punkte ausgeht. (119.)

203. Welches Verhältnis besteht zwischen der Seite eines regelmäſsigen Sechsecks und der Seite eines inhaltsgleichen gleichseitigen Dreiecks?

204. Ein Dreieck wird durch zwei Transversalen, welche der einen Seite parallel laufen, in drei Stücke vom Flächeninhalt A, B und C geteilt. Bestimme das Verhältnis zwischen den Entfernungen der Parallelen.

205. Beweise, daſs ein Viereck doppelt so groſs ist wie das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man die Mitten seiner Seiten der Reihe nach verbindet.

206. Der Flächeninhalt eines Vierecks ist bekannt, und ebenso die Abschnitte, in welche sich die Diagonalen teilen; berechne den Flächeninhalt jedes der vier Dreiecke, in welche die Diagonalen das Viereck teilen.

207. Welches ist das gröfste Dreieck, das man aus einem quadratischen Stück Papier von der Seite a schneiden kann?

208. Beweise, dafs der Flächeninhalt eines einbeschriebenen regelmäfsigen $2n$-Ecks die mittlere Prorportionale ist zwischen den Inhalten des um- und einbeschriebenen n-Ecks.

209. Wie grofs ist der Radius eines Kreises, dessen Flächeninhalt gleich 1 qm?

210. Wie grofs ist der Radius eines Kreises, in dem ein Sector von 7° 12′ einen Flächeninhalt von 2 qcm hat?

211. Wie grofs ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, dessen Bogen 90° beträgt, wenn der Radius gleich r ist?

212. Mit Hülfe concentrischer Kreise einen gegebenen Kreis in drei gleiche Teile zu teilen.

213. Wie grofs ist der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, dessen Bogen 30° beträgt, wenn der Radius r ist?

214. In einem Kreise mit dem Radius r sind zwei parallele Sehnen gezogen, welche Bogen von beziehungsweise 60° und 120° abschneiden; wie grofs ist das zwischen den Sehnen liegende Flächenstück?

215. Zwei gleiche Kreise mit dem Radius r gehen gegenseitig durch ihre Mittelpunkte; wie grofs ist der Inhalt der Figur, welche sie gemeinschaftlich haben?

216. Drei gleiche Kreise mit dem Radius r berühren sich gegenseitig; wie grofs ist das zwischen ihnen liegende Flächenstück?

217. In einen Sector von 90° ist ein Kreis beschrieben; wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Figuren zu einander?